

Notas de aula do curso de Teoria Eletromagnética (em preparação)

atualizado em 19 de Junho de 2013

Resumo das atualizações

- inclusão de capítulo sobre magnetostática em materiais (em preparação).
- concluído o capítulo sobre supercondutividade.
- várias correções.

Heinrich Hertz, sobre as equações de Maxwell:

“One cannot escape the feeling that these mathematical formulae have an independent existence and an intelligence of their own, that they are wiser than we are, wiser even than their discoverers, that we get more out of them than was originally put into them”

Conteúdo

1	Estrutura dos Campos Elétrico e Magnético	8
1.1	Função Delta de Dirac $\delta(\vec{r})$ em diferentes sistemas de coordenadas	12
1.2	Integração por partes	13
1.3	Sistema de Unidades	13
2	Equações do Eletromagnetismo: um formulário	16
2.1	Equações de Maxwell na Matéria	17
3	Campos Eletrostáticos: Introdução	19
3.1	Distribuição Contínua de Carga	19
3.2	Lei de Gauss	20
3.3	Divergência do vetor \vec{E}	20
3.4	Circulação do campo \vec{E}	23
3.5	Equações da Eletrostática	24
3.6	Campos \mathbf{E} e ϕ em interfaces	24
3.7	Energia Elétrica	25
3.8	Capacitância entre condutores	27
4	Método das funções de Green	29
4.1	Identidades de Green	30
4.2	Condições de Contorno da Função de Green	33
4.2.1	Condições de Dirichlet: $\phi(\mathbf{r}')$ determinado.	33
4.2.2	Condições de Neumann: $\frac{\partial\phi}{\partial n}\Big _S$ determinado.	33
4.3	Simetria das Funções de Green	35
4.4	Unicidade de $\phi(\mathbf{r})$ em \mathcal{V}	35
4.5	Resumo	37
4.6	Apêndice: Método da função de Green aplicado ao oscilador harmônico amortecido	37
5	Método da carga imagem	40
5.1	Carga imagem num plano condutor infinito	40
5.2	Carga imagem numa esfera condutora	43
5.2.1	Esfera condutora aterrada	43
5.2.2	Esfera condutora mantida em um potencial V	46
5.2.3	Esfera isolada	47
5.2.4	Esfera metálica na presença de campo elétrico uniforme: dipolo imagem	49

5.2.5	Cargas pontuais entre planos condutores oblíquos.	50
5.3	Hemisférios circulares em potenciais $\pm V$: uma aplicação do método de Green	51
6	Equação de Laplace:	
	Separação de Variáveis	54
6.1	Coordenadas Cartesianas	54
6.2	Coordenadas polares em 2D	57
6.3	Soluções da Equação Diferencial de Laplace em 3D	60
6.4	Problema de Sturm-Liouville	62
6.5	Completeza	68
6.6	Unicidade das séries de Funções Características	68
7	Expansão da Função de Green	70
7.1	Coordenadas Esféricas	70
7.2	Expansão da função de Green $\frac{1}{ \mathbf{r}-\mathbf{r}' }$ com simetria axial	73
7.3	Harmônicos Esféricos	75
7.4	Função de Green com condições de contorno esféricas	78
8	Expansão Multipolar do Potencial	85
8.1	Expansão	85
8.2	Expansão Multipolar do Potencial $\phi(\mathbf{r})$ em Coordenadas Cartesianas	90
8.3	Algumas propriedades	92
8.3.1	Somente o momento de ordem mais baixa é independente da origem	92
8.4	Campo Elétrico de uma expansão multipolar	93
8.5	Energia de uma Distribuição de Carga em presença de em um campo externo	94
8.6	Interação Dipolar	97
9	Eletrostática em Meios Materiais	98
9.1	Evolução tecnológica dos dielétricos	98
9.2	Equações da Eletrostática em Meios Materiais	99
9.3	Condições de Contorno	102
9.4	O método da carga imagem em meios dielétricos	103
9.5	Potencial de uma esfera dielétrica polarizada	106
9.5.1	Campo de depolarização	109
9.5.2	Cavidade esférica	109
9.6	Relações constitutivas para Polarizibilidade Molecular	111
9.6.1	Equação de Clausius-Mosotti	111
9.6.2	Equação de Maxwell-Garnett para misturas dielétricas	114
9.7	Equação de Poisson-Boltzmann	115
9.7.1	Aproximação linear	117
10	Equações da Magnetostática	120
10.1	Força Magnética	121
10.2	Equações Diferenciais da Magnetostática	121
10.3	Potencial Vetor \mathbf{A}	124
10.4	Campos Magnéticos na Matéria	125

11 Magnetismo	141
11.1 Revisão de Física Atômica	141
11.2 Algumas definições	144
11.3 Teoria Quântica para o Paramagnetismo	145
11.3.1 Dielétricos	145
11.3.2 Metais	147
11.4 Ferromagnetismo	149
11.5 Campos Magnéticos Quasi-estáticos	153
11.5.1 Efeitos de superfície	153
11.5.2 Comprimento de penetração magnética	154
11.6 Supercondutividade	156
11.6.1 Descrição fenomenológica	156
11.6.2 Efeito Meissner-Orchsenfeld	158
11.6.3 Equações de London para a Supercondutividade	158
11.6.4 Quantização do Fluxo magnético	161
11.6.5 Comparação com o monopolo magnético.	162
12 Equações de onda de Maxwell	163
12.1 Contribuições de Maxwell	163
12.1.1 Equações de Maxwell	164
12.1.2 Ondas EM no vácuo	167
12.1.3 Potenciais Retardados	168
13 Função dielétrica: Dielétricos, Condutores e Plasmas	170
13.1 Modelo para $\varepsilon(\omega)$ em dielétricos	170
13.1.1 Caso Estático.	170
13.1.2 Caso dinâmico $\varepsilon(\omega)$	172
13.1.3 Parâmetros Ópticos	175
13.1.4 Modelo de Drude e Condutividade AC em Metais	176
13.1.5 Propriedade Ópticas dos Metais	177
14 Causalidade e Relações de Dispersão	182
14.1 Causalidade em sistemas de resposta linear	182
14.2 Relação de Dispersão e Equações de Kramers-Kronig	186
14.3 Refração e Absorção	189
15 Conservação de energia e momento no Eletromagnetismo	191
15.1 Conservação de energia	191
15.1.1 Meios não dispersivos	191
15.1.2 Dissipação e ganho de energia em meios dispersivos	192
15.2 Conservação de Momento	196
15.2.1 Tensor de força elétrica	196
15.2.2 Tensor de força magnética	198
15.2.3 Tensor de forças de Maxwell	199
15.2.4 Conservação de Momento Linear na eletrodinâmica	200
15.2.5 Campos Harmônicos	201

Fórmulas do Cálculo Vetorial

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \\
 \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \\
 (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \\
 \nabla \times \nabla \psi &= \mathbf{0} \\
 \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) &= 0 \\
 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a} \\
 \nabla \cdot (\psi \mathbf{a}) &= \mathbf{a} \cdot \nabla \psi + \psi \nabla \cdot \mathbf{a} \\
 \nabla \times (\psi \mathbf{a}) &= \nabla \psi \times \mathbf{a} + \psi \nabla \times \mathbf{a} \\
 \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) &= (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) \\
 \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) \\
 \nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}
 \end{aligned}$$

Se \vec{r} designa a coordenada de um ponto em relação a uma origem, com magnitude $r = |\vec{r}|$, $\hat{r} = \vec{r}/r$ é seu versor, e $f(r)$ é uma função bem definida de r , então

$$\nabla \cdot \vec{r} = 3 \qquad \nabla \times \vec{r} = 0$$

$$\nabla \cdot [\hat{r}f(r)] = \frac{2}{r}f + \frac{\partial f}{\partial r} \qquad \nabla \times [\hat{r}f(r)] = 0$$

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla)\hat{r}f(r) = \frac{f(r)}{r}[\mathbf{a} - \hat{r}(\mathbf{a} \cdot \hat{r})] + \hat{r}(\mathbf{a} \cdot \hat{r})\frac{\partial f}{\partial r}$$

$$\nabla(\vec{r} \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{a} + \vec{r}(\nabla \cdot \mathbf{a}) + i(L \times \mathbf{a})$$

onde

$$L = \frac{1}{i}(\vec{r} \times \nabla)$$

é o operador momento angular.

Teoremas do Cálculo Vetorial

No formulário abaixo ϕ, ψ, \mathbf{A} e \mathbb{T} são campos escalares, vetoriais e tensoriais bem comportados, \mathcal{V} representa um volume no espaço 3D com elemento de volume dV e \mathcal{S} é a superfície fechada que define o volume \mathcal{V} , com elemento de área dS e versor normal orientado para fora \mathbf{n} em dS .

- Os seguintes resultados referem-se à identidade entre os operadores vetoriais

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla(\dots) dV = \oint_{\mathcal{S}} (\dots) \mathbf{n} dS \qquad (1)$$

onde (\dots) denota uma expressão que pode conter os operadores \cdot ou \times . Casos particulares são:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV &= \int_{\mathcal{S}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS && \text{(Teorema da Divergência)} \\ \int_{\mathcal{V}} \nabla \psi \, dV &= \int_{\mathcal{S}} \psi \mathbf{n} \, dS \\ \int_{\mathcal{V}} \nabla \times \mathbf{A} \, dV &= \int_{\mathcal{S}} \mathbf{n} \times \mathbf{A} \, dS \\ \int_{\mathcal{V}} (\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) \, dV &= \int_{\mathcal{S}} \phi \mathbf{n} \cdot \nabla \psi \, dS \\ \int_{\mathcal{V}} (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) \, dV &= \int_{\mathcal{S}} (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot \mathbf{n} \, dS && \text{(Teorema de Green)} \\ \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbb{T} \, dV &= \int_{\mathcal{S}} \mathbb{T} \cdot \mathbf{n} \, dS \end{aligned}$$

No formulário a seguir, \mathcal{S} é uma superfície aberta e \mathcal{C} o contorno que a define, com elemento de linha orientado $d\mathbf{l}$. A orientação do vetor normal \mathbf{n} de \mathcal{S} é definida pela regra da mão direita em relação ao contorno \mathcal{C} .

- Os seguintes resultados referem-se à identidade entre os operadores vetoriais

$$\int_{\mathcal{S}} (\mathbf{n} \times \nabla) (\dots) \, dV = \oint_{\mathcal{C}} d\mathbf{l} (\dots) \quad (2)$$

onde (\dots) denota uma expressão que pode conter os operadores \cdot ou \times . Casos particulares são:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \, dS &= \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} && \text{(Teorema de Stokes)} \\ \int_{\mathcal{S}} \mathbf{n} \times \nabla \psi \, dS &= \oint_{\mathcal{C}} \psi \, d\mathbf{l} \\ \int_{\mathcal{S}} (\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{A} \, dS &= \oint_{\mathcal{C}} d\mathbf{l} \times \mathbf{A} \end{aligned}$$

Representação dos Operadores Vetoriais

- Coordenadas Cartesianas Retangulares (x, y, z)

$$\begin{aligned} \nabla \psi &= \hat{x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \hat{x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \\ \nabla^2 \psi &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \end{aligned}$$

- Coordenadas Cilíndricas (ρ, φ, z)

$$\begin{aligned}\nabla\psi &= \hat{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \hat{\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \hat{z}\frac{\partial\psi}{\partial z} \\ \nabla\cdot\mathbf{A} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \nabla\times\mathbf{A} &= \hat{\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right) + \hat{\varphi}\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right) + \hat{z}\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\varphi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right) \\ \nabla^2\psi &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\end{aligned}$$

- Coordenadas Esféricas (r, θ, φ)

$$\begin{aligned}\nabla\psi &= \hat{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \hat{\varphi}\frac{1}{r\text{sen}\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \\ \nabla\cdot\mathbf{A} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\text{sen}\theta A_\theta) + \frac{1}{r\text{sen}\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} \\ \nabla\times\mathbf{A} &= \hat{r}\frac{1}{r\text{sen}\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\text{sen}\theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right] + \hat{\theta}\left[\frac{1}{r\text{sen}\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r A_\varphi)\right] + \hat{\varphi}\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right] \\ \nabla^2\psi &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\text{sen}^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\end{aligned}$$

Note que

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi)$$

Capítulo 1

Estrutura dos Campos Elétrico e Magnético

Consideremos campos estáticos no vácuo. Um campo vetorial $\vec{v}(\mathbf{r})$ em 3D é completa e univocamente determinado se a densidade de **fontes** $s(\mathbf{r})$ e a densidade de **circulação** $\vec{c}(\mathbf{r})$ são conhecidas e **compactas** em todo espaço, ou seja, se $s(\mathbf{r})$ e $\vec{c}(\mathbf{r})$ se anulam como $1/r^{2+\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$) quando $r \rightarrow \infty$, no espaço tridimensional. Analogamente, o campo vetorial $\vec{v}(\mathbf{r})$ deve se anular como $1/r^{1+\varepsilon}$ quando $r \rightarrow \infty$, para que seja univocamente determinado.¹

De maneira geral, as equações que definem um campo vetorial estático \vec{v} em termos de suas fontes são

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \vec{v} &= \text{div} \cdot \vec{v} = s \\ \nabla \times \vec{v} &= \text{rot} \cdot \vec{v} = \vec{c} \end{aligned} \right\}, \quad (I)$$

onde os operadores têm o seguinte significado físico: $\text{div} \equiv$ fluxo/volume e $\text{rot} \equiv$ circulação/área. Note ainda que as equações são auto-consistentes somente se $\nabla \cdot \vec{c} = 0$, como veremos adiante. Esse teorema é denominado pelos matemáticos *Teorema fundamental da análise vetorial*, ou *Teorema de Helmholtz* para os físicos.

Decomposição de Helmholtz: qualquer campo vetorial pode ser escrito (descrito) como a soma de dois campos vetoriais independentes, na forma

$$\vec{v} = -\nabla\phi + \nabla \times \vec{A} = -\text{grad } \phi + \text{rot} \times \vec{A} \quad (II)$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(\mathbf{r}) \quad \text{é um campo potencial escalar} \\ \nabla\phi \quad \text{é um campo vetorial irrotacional (ou longitudinal)} \end{array} \right.$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{A}(\mathbf{r}) \quad \text{é um potencial vetor} \\ \nabla \times \vec{A} \quad \text{é um campo vetorial solenoidal (ou transversal)}. \end{array} \right.$$

Os campos $\nabla\phi$ e $\nabla \times \vec{A}$ são independentes e complementares, pois

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times (\nabla\phi) &= 0 \\ \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ sempre, para qualquer campo vetorial.}$$

¹Uma discussão sucinta e clara é apresentada em David J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, Prentice-Hall, 1989, apêndice B.

As identidades acima também podem ser reescritas na forma integral aplicando-se os teoremas de Stokes e Gauss, respectivamente,

$$\oint_C \nabla \phi \, d\mathbf{l} = 0$$

$$\oint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \hat{n} \, dS = 0 ,$$

onde o significado físico fica mais evidente ($\oint_C \vec{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ e $\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} \, dS = 0$). Notemos, por fim, que as equações (I) e (II) definem completamente o campo vetorial \vec{v} , mas não os potenciais auxiliares, que podem ser descritos de maneira geral como $\phi + C$, onde C é uma constante, e $\vec{A} + \nabla\psi$, com ψ um campo escalar. Em ambos os casos, o campo \vec{v} não se altera.

As equações (I) e (II) estabelecem as seguintes relações entre campos e fontes, agora na forma de equações integrais ²

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{s(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} dV' \tag{III}$$

$$\vec{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{c}(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} dV' ,$$

onde definimos,

$$\mathcal{R}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - x'_i)^2} = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| ,$$

a distância entre a posição da fonte e a posição onde o campo está sendo calculado. O fator $1/4\pi$ aparece porque estamos no espaço 3D, mas pode ser eliminado em alguns sistemas de unidades chamadas *racionalizadas*. Note também que

$$\frac{d\mathcal{R}}{dx_i} = -\frac{dx'_i}{dx_i} . \tag{1.1}$$

Esse resultado será bastante útil nos cálculos seguintes.

Mostraremos, na sequência, que as equações (I), (II) e (III) são autoconsistentes e gerais (no caso estático) se as fontes são compactas. Inicialmente, para $\nabla \cdot \vec{v} = s$ em (I), temos

$$\nabla \cdot \vec{v} = -\nabla^2 \phi - \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = -\nabla^2 \phi ,$$

pois $\nabla \times \vec{A}$ é transversal. Utilizando a representação integral para o campo ϕ

$$\nabla \cdot \vec{v} = -\nabla^2 \phi = -\nabla^2 \cdot \frac{1}{4\pi} \int \frac{s(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} dV'$$

²Note que as integrais (III) convergem apenas se as fontes forem compactas, pois quando $r \rightarrow \infty$ temos $\mathcal{R} \approx r'$ e as integrais comportam-se como

$$\int \frac{X(r')}{r'} dV' = \int r' X(r') \, dr' \, d\Omega' .$$

Um decaimento tipo $X(r') \sim 1/r'^2$ não é suficiente, pois nesse caso a integral diverge logaritmicamente.

Note que $\nabla^2\phi$ opera nas coordenadas do campo \mathbf{r} , portanto

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{-1}{4\pi} \int s(\mathbf{r}') \nabla^2 \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \right) dV' .$$

\implies Cálculo de $\nabla^2 \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \right) = -4\pi\delta(\vec{\mathcal{R}})$:

Usando coordenadas esféricas com origem em \mathbf{r}' , tal que $\mathcal{R} = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r$, temos para $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = \left(\frac{1}{r^2} \right) \partial_r \left[r^2 \partial_r \left(\frac{1}{r} \right) \right] = \left(\frac{1}{r^2} \right) \partial_r \left[r^2 \cdot \frac{-1}{r^2} \right] = 0 .$$

Para $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ temos uma **divergência** em $\nabla^2 \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \right)$. No entanto, a integral

$$\int \nabla^2 \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \right) dV' \tag{1.2}$$

deve ser finita, pois

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{4\pi} \int s(\mathbf{r}') \nabla^2 \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \right) dV'$$

é bem definido. Utilizando a propriedade descrita na Eq. (1.1)

$$\nabla\psi(\mathcal{R}) = -\nabla'\psi(\mathcal{R}) \tag{1.3}$$

$$\nabla^2\psi(\mathcal{R}) = \nabla'^2\psi(\mathcal{R}) , \tag{1.4}$$

podemos aplicar o teorema da divergência, assumindo a origem em \mathbf{r}' e integrando na variável \mathbf{r} (note a simetria entre \mathbf{r} e \mathbf{r}')

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla^2 \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \right) dV = \int_{\mathcal{S}} \nabla \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \right) \cdot \hat{n} dS = \int_{\mathcal{S}} \frac{-\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \cdot \hat{n} dS ,$$

com $\hat{n} = \hat{\mathcal{R}}$, pois tomamos \mathcal{S} como uma superfície esférica, com o centro em \mathbf{r}' . Por fim, obtemos

$$- \int \frac{dS}{\mathcal{R}^2} = - \int \left(\frac{\mathcal{R}^2}{\mathcal{R}^2} \right) d\Omega = - \int d\Omega = -4\pi , \tag{1.5}$$

onde $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ é o elemento de ângulo sólido. A integração $\int \nabla (1/\mathcal{R}) d\mathbf{S}$ deve ser feita com cautela, pois $\nabla \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \right)$ é singular em $\mathcal{R} = \mathbf{0}$. Uma alternativa é integrar $\frac{1}{\mathcal{R}} \left(1 - e^{-\frac{\mathcal{R}}{a}} \right)$ e depois tomar o limite $a \rightarrow 0$.

Portanto $\nabla^2 \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \right)$ se comporta como a função delta de Dirac, $\nabla^2 \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \right) = -4\pi\delta(\vec{\mathcal{R}})$ em 3D, com $\vec{\mathcal{R}} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, pois

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{-1}{4\pi} \right) \int \nabla^2 \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \right) dV &= \int \delta(\vec{\mathcal{R}}) dV = 1 \\ \nabla^2 \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \right) &= 0 , \text{ para } \mathcal{R} \neq 0 \end{aligned} \right\} \longleftarrow$$

\longrightarrow Exercício: Mostrar que $\nabla \left(\frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \right) = 4\pi\delta(\mathcal{R})$.

De volta às equações do campo \vec{v}

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{v} &= -\nabla^2 \phi = \frac{-1}{4\pi} \int s(\mathbf{r}') \nabla^2 \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \right) dV' = \int s(\mathbf{r}') \delta(\vec{\mathcal{R}}) dV' = \int s(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' \\ &= s(\mathbf{r}) .\end{aligned}$$

Portanto, de maneira geral, mostramos que as equações I, II e III são consistentes na relação entre fluxo do campo e densidade de fonte, $\nabla \cdot \vec{v} = s(\mathbf{r})$.

Para a equação que descreve a circulação do campo \vec{v} , $\nabla \times \vec{v} = \vec{c}(\mathbf{r})$, isolamos a componente transversal do campo, associada à densidade de circulação

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{v} &= \nabla \times \left(-\nabla \phi + \nabla \times \vec{A} \right) = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \\ &= \nabla \left[\nabla \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{c}(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}} dV' \right] - \nabla^2 \left[\frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{c}(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}} dV' \right] .\end{aligned}$$

Note que o segundo termo do lado direito na equação acima é:

$$\frac{-1}{4\pi} \int \vec{c}(\mathbf{r}') \nabla^2 \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \right) dV' = \int \vec{c}(\mathbf{r}') \delta(\vec{\mathcal{R}}) dV' = \vec{c}(\mathbf{r}) .$$

Calculamos, a seguir, o valor de primeira integral

$$\frac{1}{4\pi} \nabla \left[\int \vec{c}(\mathbf{r}') \nabla \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \right) \right] dV' .$$

Utilizando a propriedade $\nabla \psi(\mathcal{R}) = -\nabla' \psi(\mathcal{R})$ e integrando por partes obtemos

$$-\frac{1}{4\pi} \nabla \int_{\mathcal{V}} \vec{c}(\mathbf{r}') \nabla' \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \right) dV' = -\frac{1}{4\pi} \nabla \left\{ \int_{\mathcal{S}} \frac{\vec{c}(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}} \hat{n} dS' - \int \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{c}(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}} dV' \right\} .$$

Se as fontes são compactas, ou seja, $\vec{c}(\mathbf{r}) \rightarrow 0$ mais rapidamente que $1/r^2$, e a superfície \mathcal{S} está no infinito (infinito = muito além das fontes), a integral sobre a superfície é nula. A segunda integral se anula pois podemos escrever $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = \nabla \cdot \vec{c} = 0$. Ou seja \mathbf{c} é puramente transversal. Note que no caso **dinâmico** $\nabla \cdot \vec{c} = -\partial s / \partial t$ pode ser diferente de zero.

Mostramos, para o caso estático e no vácuo, que I, II, III são equações de campos auto-consistentes, usando apenas relações vetoriais gerais, sem fazer menção às leis do eletromagnetismo. Portanto devem ser a base para qualquer teoria de campos.

\implies A seguir provamos a unicidade da solução \vec{v} .

Consideremos duas soluções (campos) \vec{v}_1 e \vec{v}_2 que são produzidas pelas mesmas fontes

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{v}_1 &= s & \nabla \times \vec{v}_1 &= \vec{c} , \\ \nabla \cdot \vec{v}_2 &= s & \nabla \times \vec{v}_2 &= \vec{c} .\end{aligned}$$

Nesse caso, a unicidade deve mostrar que $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$ em todo espaço. Para isso definimos o campo $\vec{w} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$, para o qual temos

$$\left. \begin{aligned}\nabla \cdot \vec{w} &= \nabla \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = s - s = 0 \\ \nabla \times \vec{w} &= \vec{c} - \vec{c} = 0\end{aligned} \right\} \text{ em todo espaço.}$$

Mas $\nabla \times \vec{w} = 0$ implica em $\vec{w} = -\nabla\psi$, onde ψ é um campo escalar. Além disso, da equação $\nabla \cdot \vec{w} = 0$ obtemos também que $\nabla^2\psi = 0$ em todo espaço.

Aplicando o teorema da divergência ao campo $\psi\nabla\psi$, tendo em vista o resultado $\nabla^2\psi = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}} \psi \nabla \psi \, dS &= \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\psi \nabla \psi) \, dV = \int_{\mathcal{V}} (\nabla \psi \cdot \nabla \psi + \psi (\nabla^2 \psi)) \, dV \\ &= \int_{\mathcal{V}} (\nabla \psi)^2 \, dV \\ &= \int_{\mathcal{V}} |\vec{w}|^2 \, dV. \end{aligned}$$

Se as fontes são compactas e os campos estáticos temos $\psi \rightarrow 0$ no infinito (essa hipótese garante que a energia do campo é finita, portanto tem significado físico). Por fim, para $\mathcal{S} \rightarrow \infty$

$$\int_{\mathcal{S}} \psi \nabla \psi \, dS = \int_{\mathcal{V}} |\vec{w}|^2 \, dV = 0$$

e o próprio campo $\vec{w} = 0$ em todo espaço, portanto $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$. \Leftarrow

1.1 Função Delta de Dirac $\delta(\vec{r})$ em diferentes sistemas de coordenadas

Para expressar $\delta(\vec{r}) = \delta(x) \delta(y) \delta(z)$ em termos de coordenadas $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$, usamos o Jacobiano $J(x_i, \xi_i)$.

Coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) : $x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \sin\theta$, $z = z$.

$$\delta(\vec{r}) = \delta(x) \delta(y) \delta(z) = \frac{1}{|J(x_i, \xi_i)|} \delta(\rho) \delta(\theta) \delta(z)$$

$$|J(x_i, \xi_i)| = \begin{vmatrix} \partial x / \partial \rho & \partial x / \partial \theta & \partial x / \partial z \\ \partial y / \partial \rho & \partial y / \partial \theta & \partial y / \partial z \\ \partial z / \partial \rho & \partial z / \partial \theta & \partial z / \partial z \end{vmatrix} = \rho \cos^2\theta + \rho \sin^2\theta = \rho$$

Portanto

$$\delta(\vec{r}) = \delta(x) \delta(y) \delta(z) \equiv \frac{\delta(\rho)}{\rho} \delta(\theta) \delta(z)$$

$$\int \frac{\delta(\rho)}{\rho} \delta(\theta) \delta(z) \rho \, d\rho \, d\theta \, dz = 1$$

Coordenadas esféricas (r, φ, θ) : $x = r \sin\theta \cos\varphi$, $y = r \sin\theta \sin\varphi$, $z = r \cos\theta$

$$|J(x_i, \xi_i)| = \begin{vmatrix} \partial x / \partial r & \partial x / \partial \varphi & \partial x / \partial \theta \\ \partial y / \partial r & \partial y / \partial \varphi & \partial y / \partial \theta \\ \partial z / \partial r & \partial z / \partial \varphi & \partial z / \partial \theta \end{vmatrix} = -r^2 \sin\theta$$

Então

$$\delta(\vec{r}) = \delta(x) \delta(y) \delta(z) \equiv \frac{\delta(r) \delta(\varphi) \delta(\theta)}{r^2 \operatorname{sen}\theta}$$

1.2 Integração por partes

Em 1D a integração por partes resulta em

$$\int_a^b (f \cdot g') dx = f \cdot g \Big|_a^b - \int_a^b (f' \cdot g) dx$$

Em 3D a linha entre os limites \mathbf{a} e \mathbf{b} torna-se um volume. Os limites do volume \mathcal{V} são os pontos sobre a superfície \mathcal{S} que define \mathcal{V} . Portanto, podemos escrever

$$\int_{\mathcal{V}} \psi \nabla^2 \phi dV = \int_{\mathcal{S}} \psi \nabla \phi \cdot \hat{n} dS - \int_{\mathcal{V}} \nabla \psi \cdot \nabla \phi dV ,$$

que é a primeira identidade de Green. Em particular

$$\int_{\mathcal{V}} \phi \nabla^2 \phi dV = \int_{\mathcal{S}} \phi \nabla \phi \cdot \hat{n} dS - \int_{\mathcal{V}} |\nabla \phi|^2 dV .$$

1.3 Sistema de Unidades

Nas equações da mecânica clássica não aparecem constantes universais como e, \hbar, c, \dots . As grandezas mecânicas são descritas por um sistema de unidades mecânicas

M (massa), L (comprimento), T (tempo)

No **eletromagnetismo** o campo elétrico é definido pela seguinte relação teórica

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q} ,$$

de maneira semelhante para o campo \vec{B} e a corrente \vec{j} . Razões históricas determinaram os sistemas de unidades eletromagnéticas. De maneira geral, escreve-se

$$\vec{F}_{el} = K_{el} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}$$

$$\vec{F}_{mag} = K_{mag} \int \frac{\vec{j}_1 \times (\vec{j}_2 \times \vec{r}_{12})}{r_{12}^3} dv_1 dv_2$$

Sistema cgs:

Se fizermos $K_{el} = 1$ (adimensional) a carga é medida em termos de um sistema de unidades mecânicas

$$\text{carga} = [ML^3T^{-2}]^{\frac{1}{2}}$$

do mesmo modo para a corrente

$$\text{corrente} = [MLT^{-2}]^{\frac{1}{2}} = [\text{força}]^{\frac{1}{2}} .$$

Nesse caso, a constante c deve aparecer explicitamente nas equações de Maxwell, para descrever as propriedades do vácuo

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}$$

Além disso, o sistema não é racionalizado (não contém o fator $\frac{1}{4\pi}$) e podemos escolher as unidades de fontes:

$$\begin{aligned} \underline{\text{uem}} \text{ (unidade eletromagnética)} &\rightarrow 1 \text{ abampere} = \frac{1}{10} A \\ \underline{\text{ues}} \text{ (unidade eletrostática)} &\rightarrow 1 \text{ abcoulomb} \simeq 3,34 \times 10^{-10} C \end{aligned}$$

Sistema mks:

Incorpora unidades técnicas como Volt (V), Ampère (A), Coulomb (C), etc. No vácuo escrevemos

$$\vec{F}_{el} = \underbrace{\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{\varepsilon_0}}_{K_{el}} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} ,$$

racionalizada pelo fator $\frac{1}{4\pi}$ e ε_0 é a constante dielétrica do vácuo. Para a força magnética

$$\vec{F}_{mag} = \underbrace{\mu_0 \frac{1}{4\pi}}_{K_{mag}} \int \frac{\vec{j}_1 \times (\vec{j}_2 \times \vec{r}_{12})}{r_{12}^3} dv_1 dv_2$$

onde μ_0 permissividade do vácuo e $\frac{1}{4\pi}$ é o fator de racionalização.

As constantes μ_0 e ε_0 são definidas para ajustar o sistema de unidades eletromagnético ao mecânico

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{kg \cdot m}{c^2} = 4\pi \times 10^{-7} \frac{Henry}{m} .$$

Usando $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}$ obtemos

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} \cong 8,854 \times 10^{-12} \frac{c^2 s^2}{kg m^3} = 8,854 \times 10^{-12} \frac{Farad}{m} .$$

No sistema **mks**, como ε_0 e μ_0 estão explicitamente definidos, c não aparece nas equações de Maxwell.

Outros Sistemas:

$$\text{Heaviside-Lorentz: } \begin{cases} \varepsilon_0 = \mu_0 = 1 \\ \text{racionalizado} \end{cases}$$

$$\text{atômico: } \begin{cases} \hbar = c = 1 \\ \text{racionalizado} \\ \varepsilon_0 = \mu_0 = 1 \end{cases}$$

Nos meios contínuos campo e fonte se misturam

$$\rho_{pol} = -\nabla \cdot \vec{P} \qquad \vec{j}_M = \nabla \times \vec{M}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_0 - \nabla \cdot \vec{P}}{\varepsilon_0} \qquad \frac{B}{\mu_0} = \vec{H} + \vec{M} \qquad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

onde \vec{P} é a polarização e \vec{M} a magnetização. No sistema **mks** \vec{P} e \vec{M} têm unidades distintas dos campos, mas no sistema **cgs** a dualidade entre campo e fonte fica mais evidente.

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= \vec{D} - 4\pi\vec{P} \\ \vec{B} &= \vec{H} + 4\pi\vec{M} \end{aligned} \right\}$$

Capítulo 2

Equações do Eletromagnetismo: um formulário

Temos as 4 equações do eletromagnetismo **no vácuo**

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} . \quad (2.4)$$

Na ausência de fontes, isto é, $\rho = 0$ e $\mathbf{j} = 0$ ficamos com as seguintes equações, no sistema internacional (SI)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} .$$

No sistema gaussiano (CGS) temos

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} .$$

No sistema de coordenadas naturais ($c=\hbar=1$)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} .$$

2.1 Equações de Maxwell na Matéria

Em meios materiais, as fontes de campo devem ser redefinidas, para incorporar a resposta do meio contínuo:

- densidade de carga ρ

$$\rho = \rho_l - \nabla \cdot \mathbf{P} \quad (2.5)$$

$$= \rho_l + \rho_{pol} , \quad (2.6)$$

onde ρ_l representa a densidade de cargas livres (monopólos) e $\rho_{pol} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ designa a densidade de cargas ligadas (de polarização), *e.g.*, em dielétricos, átomos e moléculas.

- densidade de corrente \mathbf{j}

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_l + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \quad (2.7)$$

$$= \mathbf{j}_l + \mathbf{j}_{pol} + \mathbf{j}_{mag} , \quad (2.8)$$

onde \mathbf{j}_l representa a densidade de corrente de cargas livres. A densidade de corrente de cargas de polarização, \mathbf{j}_{pol} , obedece a uma equação de continuidade

$$\mathbf{j}_{pol} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (2.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_{pol} = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{P} = \frac{\partial}{\partial t} (-\rho_{pol})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_{pol} = -\frac{\partial \rho_{pol}}{\partial t} . \quad (2.10)$$

Para a densidade de corrente de magnetização temos $\nabla \cdot \mathbf{j}_{mag} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{M}) = 0$.

Para incorporar os novos termos de fonte que surgem como resposta dos meios materiais ao estímulo externo, preservando a forma original das equações de Maxwell, definimos dois novos campos auxiliares \mathbf{D} e \mathbf{H} .

O campo de deslocamento \mathbf{D} é definido em termos da Equação de Gauss

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_l - \nabla \cdot \mathbf{P}}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_l \quad (2.11)$$

onde

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} . \quad (2.12)$$

A Equação de Maxwell - Ampère deve levar em conta todas as densidades de corrente de carga dentro do material, portanto

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \left(\mathbf{j}_l + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \right) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{j}_l + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} , \end{aligned} \quad (2.13)$$

com $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$. A corrente de deslocamento é $\mathbf{j}_d = \partial \mathbf{D} / \partial t$, e

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} . \quad (2.14)$$

Por fim, incorporando os efeitos do meio material nos campos auxiliares, obtemos um conjunto de equações que mantém a mesma forma das equações de Maxwell no vácuo

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_l \quad (2.15)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.16)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.17)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_l + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.18)$$

A polarização e a magnetização para os materiais lineares define-se como

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_{el} \mathbf{E} \quad \mathbf{M} = \chi_{mag} \mathbf{H} \quad (2.19)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \quad (2.20)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_{el}) \quad \mu = \mu_0 (1 + \chi_{mag}) \quad (2.21)$$

Capítulo 3

Campos Eletrostáticos: Introdução

3.1 Distribuição Contínua de Carga

Para uma distribuição contínua de carga, temos a fórmula de Coulomb para o campo \mathbf{E}

$$\vec{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}}$$

com $\vec{\mathcal{R}} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Dependendo da dimensionalidade do sistema, ou da simetria da distribuição de carga, podemos ter:

- 3D: $dq = \rho(\mathbf{r}') dV'$
- 2D: $dq = \sigma(\mathbf{r}') dS'$
- 1D: $dq = \lambda(\mathbf{r}') dl'$

Para uma distribuição de carga tridimensional:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}} dV' .$$

Para uma superfície carregada:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}} dS' .$$

Portanto, se conhecermos $\rho(\mathbf{r})$ em todo espaço podemos calcular os campos ϕ e \mathbf{E} utilizando a fórmula de Coulomb

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}} dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}} dS' . \quad (3.1)$$

Mas raramente essa situação ocorre na prática. Por exemplo, devemos levar em conta efeitos de

→polarização em meios materiais

→condições de contorno em metais

→etc...

que podem tornar impraticável o uso da fórmula de Coulomb. Veremos adiante como tratar tais problemas.

3.2 Lei de Gauss

Calculamos o fluxo do campo \mathbf{E} através da superfície fechada \mathcal{S}

$$\Phi_E = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot \hat{n} \, dS.$$

Consideremos o caso de uma superfície esférica com centro na origem. Se existe uma partícula de carga q no centro de \mathcal{S} , temos para o fluxo

$$\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot \hat{n} \, dS = \oint_{\mathcal{S}} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \right) \cdot \hat{n} \, r^2 \, d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\mathcal{S}} d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad (3.2)$$

onde \hat{n} aponta para fora de \mathcal{S} e $\hat{r} \cdot \hat{n} = 1$. Usando o princípio da superposição, generalizamos o resultado (3.2) para

$$\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot \hat{n} \, dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}, \quad (3.3)$$

onde Q_{int} indica toda a carga contida no interior de \mathcal{S} . As cargas externas não contribuem para Φ_E .

→ Exercício: Por simplicidade, assumimos uma superfície esférica para obter

$$\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot \hat{n} \, dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Mostrar que o resultado acima é válido para qualquer superfície fechada, com uma carga puntiforme q em qualquer posição em seu interior.

3.3 Divergência do vetor \vec{E}

A fórmula de Gauss associa o fluxo Φ_E à carga em um certo volume macroscópico \mathcal{V}

$$\Phi_E = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot \hat{n} \, dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad (3.4)$$

A mesma relação pode ser estabelecida localmente por meio de operadores diferenciais. Para uma superfície fechada infinitesimal ($\Delta\mathcal{S}$) em torno do ponto \vec{P} temos

$$\Phi_{E(\Delta\mathcal{S})} = \oint_{\Delta\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot \hat{n} \, dS = \frac{\rho(\vec{P}) \cdot \Delta\mathcal{V}}{\epsilon_0}$$

onde admitimos que $\rho(\mathbf{r})$ é constante no volume infinitesimal \mathcal{V} . Portanto, localmente a densidade de carga está associada ao campo pela equação

$$\lim_{\Delta\mathcal{V} \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\mathcal{V}} \oint_{\Delta\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot \hat{n} \, dS = \frac{\rho(\vec{P})}{\epsilon_0}$$

Mas, para qualquer vetor \vec{v}

$$\text{div } \vec{v} = \lim_{\Delta\mathcal{V} \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\mathcal{V}} \oint_{\Delta\mathcal{S}} \vec{v} \cdot \hat{n} \, dS, \quad (3.5)$$

ou seja, $\text{div } \vec{v}(\mathbf{r}) = \text{fluxo de } \vec{v} \text{ no ponto } \mathbf{r} \text{ por unidade de volume.}$

Portanto, na forma local (diferencial), a fórmula de Coulomb para o campo \mathbf{E} torna-se

$$\text{div } \mathbf{E} \equiv \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0},$$

escrita numa representação independente do sistema de coordenadas.

⇒ Representação de div nos sistemas de coordenadas:

Em coordenadas cartesianas

$$\vec{\nabla} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{Operador vetorial}$$

Em coordenadas cilíndricas

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} E_\theta + \frac{\partial}{\partial z} E_z$$

Em coordenadas esféricas

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta E_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi}. \quad \Leftarrow$$

⇒ Exemplo importante: Divergente do campo produzido por uma carga puntiforme.

Sem perda de generalidade colocamos a carga puntiforme na origem, tal que

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}.$$

Calculando o divergente de \mathbf{E} obtemos

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right)$$

com

$$\frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Usando coordenadas cartesianas calculamos

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r^3} \right).$$

Para a componente com derivada em x obtemos para $\mathbf{r} \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^3} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &= \frac{1}{r^3} + x \left(\frac{-3}{2} \right) \cdot \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} 2x \\ &= \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}. \end{aligned}$$

Da mesma forma para as outras competentes

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r^3} \right) &= \frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r^3} \right) &= \frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5} .\end{aligned}$$

Portanto, para $r \neq 0$, temos simplesmente

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = \frac{3}{r^3} - \frac{3r^2}{r^5} = 0$$

O mesmo cálculo é feito facilmente em coordenadas esféricas

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{1}{r^2} \right) = 0 \quad \text{para } \mathbf{r} \neq 0 .$$

Contudo $\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right)$ diverge em $\mathbf{r} = 0$, embora a integral sobre todo o volume \mathcal{V} (incluindo a origem) seja bem definida

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} \right) dV &= \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \right) dV \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) dV &= \frac{q}{\epsilon_0} \\ \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) dV &= 4\pi\end{aligned} \tag{3.6}$$

com

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) = \begin{cases} 0 & \text{para } \mathbf{r} \neq 0 \\ \infty & \text{para } \mathbf{r} = 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

Então escrevemos

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) = 4\pi\delta(\mathbf{r}) \tag{3.8}$$

Se a carga puntiforme está fora da origem

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) = 4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{3.9}$$

Do ponto de vista físico podemos dizer que o campo $\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3$ é produzido por uma densidade de carga $\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, que corresponde a uma carga puntiforme em $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$.
 \Leftarrow

3.4 Circulação do campo \vec{E}

Após determinarmos o fluxo de \mathbf{E} em todo ponto \mathbf{r} , pretendemos determinar as propriedades de circulação do campo \mathbf{E} localmente, para descrevermos completamente o campo. Para isso considere o operador rotacional, definido como

$$\text{rot } \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \lim_{\Delta\mathcal{V} \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\mathcal{V}} \oint_{\Delta\mathcal{S}} \hat{\mathbf{n}} \times \vec{v} dS, \quad (3.10)$$

independente do sistema de coordenadas. Note a semelhança com a definição do operador *div* em (3.5). O termo $(\hat{\mathbf{n}} \times \vec{v})$ possui um análogo na mecânica clássica: $\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{r} =$, onde \vec{u} é a velocidade linear do vetor \vec{r} que gira com velocidade angular $\vec{\omega}$. Assim, $\hat{\mathbf{n}} \equiv \vec{\omega}$, $\vec{r} \equiv \vec{v}$ e $(\hat{\mathbf{n}} \times \vec{v}) \equiv \vec{u}$. Por fim, definimos $\text{rot } \vec{v}$ fisicamente como sendo circulação por unidade de comprimento. Também podemos definir $\text{rot } \vec{v}$ em termos da circulação local em torno do caminho fechado \mathcal{C} que define a família de superfícies $\Delta\mathcal{S}$

$$(\text{rot } \vec{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \equiv (\nabla \times \vec{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \lim_{\Delta\mathcal{S} \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\mathcal{S}} \oint_{\mathcal{C}} \vec{v} d\vec{l}. \quad (3.11)$$

Se aplicamos o operador diferencial $\nabla \times$ ao campo \mathbf{E} , produzido por uma certa densidade estática de carga ρ , obtemos

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= \nabla \times \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') \nabla \times \left[\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] dV'. \end{aligned}$$

Usando a relação vetorial $\nabla \times (\psi \vec{a}) = \nabla\psi \times \vec{a} + \psi \nabla \times \vec{a}$, com $\psi = 1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3$ e $\vec{a} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, escrevemos

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) = \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \nabla \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 0$$

pois temos

$$\nabla \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \nabla \times \mathbf{r} = 0$$

e

$$\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) = -3 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5}.$$

Portanto $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ para os campos eletrostáticos, com \mathbf{E} dado por (3.1), para qualquer densidade de carga estática. Conseqüentemente, aplicando-se o Teorema de Stokes, vemos que os campos eletrostáticos têm circulação nula,

$$\int_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad (3.12)$$

pois são conservativos. Ainda mais, como o resultado (3.12) é válido para qualquer superfície \mathcal{S} , temos que $\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times (-\nabla\phi) \equiv 0$ e, portanto, $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ para os campos eletrostáticos. Por essa razão as cargas estacionárias não podem produzir força eletromotriz que seja capaz de manter uma corrente circulando por um tempo arbitrário.

3.5 Equações da Eletrostática

Para os campos eletrostáticos \mathbf{E} produzidos por cargas estacionárias, vimos que se aplicam as equações diferenciais, no vácuo

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0 & (I) \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0 & (II) \end{cases} \quad (3.13)$$

Da equação (II) em (3.13), segue-se que $\mathbf{E} = -\nabla\phi$. Da união desta com (I) obtemos a Equação de Poisson para o potencial escalar ϕ

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (3.14)$$

Se $\rho = 0$ na região de interesse, o potencial é determinado pela Equação de Laplace $\nabla^2\phi = 0$, juntamente com as condições de contorno.¹

Se o campo \mathbf{E} tem um potencial escalar, $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, então o trabalho realizado pelo campo elétrico ao movimentar uma carga é dado por

$$\begin{aligned} W &= \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F}_{el} \, d\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P_2} q \mathbf{E} \, d\mathbf{r} \\ &= -q \int_{P_1}^{P_2} \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = -q \int_{P_1}^{P_2} \sum_i \left[\frac{\partial\phi}{\partial x_i} dx_i \right] \\ &= -q \int_{P_1}^{P_2} d\phi = -q [\phi(P_2) - \phi(P_1)]. \end{aligned}$$

O trabalho W é unicamente função dos pontos P_2 e P_1 . Interpretando fisicamente o potencial escalar $\phi(\mathbf{r})$ como a densidade de energia elétrica por unidade de carga no ponto \mathbf{r} (propriedade atribuída a cada ponto do espaço), temos a seguinte relação entre W e a energia elétrica da carga U_{el}

$$W = U_{el}(P_1) - U_{el}(P_2). \quad (3.15)$$

Em particular, $W = 0$ para qualquer percurso fechado, além disso $W > 0 \Rightarrow \Delta U < 0$.

3.6 Campos \mathbf{E} e ϕ em interfaces

Consideremos uma superfície arbitrária \mathcal{S} que contém uma densidade superficial de carga $\sigma(\mathbf{r})$, no vácuo. Designamos os lados à direita e à esquerda da interface por D e E.

Utilizando cada uma das equações (3.13) na forma integral é fácil mostrar que

•

$$(\mathbf{E}_D - \mathbf{E}_E) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0},$$

onde $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}}_D = -\hat{\mathbf{n}}_E$. Portanto, a componente transversal (na direção $\hat{\mathbf{n}}$) $E_D^\perp - E_E^\perp = \sigma/\varepsilon_0$ pode ser descontínua.

¹Uma discussão muito boa e ilustrativa a respeito da Equação de Laplace está em D.J. Griffiths, *Introduction do Electrodynamics*, capítulo 3.

•

$$(\mathbf{E}_D - \mathbf{E}_E) \times \hat{\mathbf{n}} = 0 ,$$

ou seja a componente longitudinal de \mathbf{E} é sempre contínua $E_D^{\parallel} - E_E^{\parallel} = 0$.

Em meios dielétricos tais relações para o campo \mathbf{E} devem ser revistas.

Para o potencial temos sempre $\phi_D = \phi_E$ na interface. ϕ deve ser contínua, mas não necessariamente analítica, como mostram as relações para o campo \mathbf{E} .

3.7 Energia Elétrica

A energia elétrica de um sistema físico pode ser interpretada como uma propriedade das cargas elétricas existentes na região do campo ou, alternativamente, como a energia do próprio campo independentemente da presença das cargas. No caso estático ambas as interpretações são equivalentes e podem ser utilizadas conforme a preferência. No caso dinâmico, no entanto, pode haver discrepâncias entre os formalismos.

A energia de uma carga puntiforme no campo eletrostático é

$$U_i = q_i \phi(\mathbf{r}_i) , \quad (3.16)$$

onde $\phi(\mathbf{r})$ é um campo externo. Para um sistema de partículas interagentes, a energia total é a soma das energias de interação entre todos os pares de partículas

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{j<i}^N \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \quad (3.17)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ (i \neq j)}}^N \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} , \quad (3.18)$$

que corresponde ao trabalho necessário para trazer cada partícula do infinito até sua posição final.

Podemos generalizar a expressão (3.18) e calcular a energia elétrica de uma distribuição contínua de carga como

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \int \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' dV = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) dV , \quad (3.19)$$

onde

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' . \quad (3.20)$$

Por outro lado, podemos escrever a energia elétrica exclusivamente em termos do campo \mathbf{E} , sem menção às cargas elétricas. Para isso usamos a equação de Poisson para reescrever (3.19) da seguinte forma

$$U = -\frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathcal{V}} \phi(\mathbf{r}) \nabla^2 \phi(\mathbf{r}) dV .$$

Integrando por partes

$$\int_{\mathcal{V}} \phi(\mathbf{r}) \nabla^2 \phi(\mathbf{r}) dV = \underbrace{\oint_{\mathcal{S}} \phi \nabla \phi \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}_0 - \int_{\mathcal{V}} |\nabla \phi|^2 dV .$$

Contudo, se admitirmos fontes localizadas que produzem potenciais que decaem como $1/r^{1+\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$), a integral sobre a superfície \mathcal{S} se anula no infinito. Vale ressaltar que a energia elétrica de um sistema não limitado (por exemplo, um fio infinito carregado) é infinita. Obtemos finalmente que

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\mathcal{V}} |\nabla \phi|^2 dV = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\mathcal{V}} |\mathbf{E}|^2 dV , \quad (3.21)$$

donde se define a densidade de energia do campo elétrico no vácuo $\mathcal{U}_{el} = \frac{\varepsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2$.

⇒ Equivalência das representações:

Observe, entretanto, que as fórmulas (3.19) e (3.21) não são completamente equivalentes. Para verificar a diferença escrevemos $\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i$, como uma superposição de campos produzidos por cargas puntiformes, tal que

$$|\mathbf{E}|^2 = \sum_i |\mathbf{E}_i|^2 + \sum_{i \neq j} \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_j . \quad (3.22)$$

O termo

$$|\mathbf{E}_i|^2 = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \right)^2 \frac{q_i^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^4}$$

depende da posição de cada partícula individualmente, portanto não representa uma energia de interação entre partículas. Ainda mais, ao integrarmos tal termo em todo o espaço (assumindo $\mathbf{r}_i = 0$) obtemos

$$U_{auto} = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \right)^2 \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{r^4} dV = \frac{q_i^2}{8\pi\varepsilon_0} \int_0^\infty \frac{1}{r^2} dr = \infty . \quad (3.23)$$

U_{auto} pode ser interpretada como a auto-energia da partícula, ou seja, a energia empregada para criá-la. A auto-energia diverge em (3.23), pois consideramos nesse exemplo partículas puntiformes (raio nulo) com carga finita q , ou seja, $\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. No eletromagnetismo clássico, entretanto, $\rho(\mathbf{r})$ é analítica e

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} Q = \rho(\mathbf{r})\Delta V = 0 ,$$

com $U_{auto} = 0$.

Para reescrevermos o segundo termo da Eq. (3.22), utilizamos a relação $\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_j = -\mathbf{E}_i \nabla \phi_j = -\nabla \cdot (\mathbf{E}_i \phi_j) + \phi_j \nabla \cdot \mathbf{E}_i$,

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_0}{2} \sum_{i \neq j} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{E}_i \mathbf{E}_j dV &= \frac{\varepsilon_0}{2} \sum_{i \neq j} \left\{ \underbrace{- \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\mathbf{E}_i \phi_j) dV}_0 + \int_{\mathcal{V}} \phi_j \nabla \cdot \mathbf{E}_i dV \right\} \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} \sum_{i \neq j} \int_{\mathcal{V}} \phi_j \frac{\rho_i(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} dV = \frac{\varepsilon_0}{2} \sum_{i \neq j} \int_{\mathcal{V}} \phi_j \frac{q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{\varepsilon_0} dV \\ &= \frac{1}{2} \sum_i q_i \left(\sum_{j \neq i} \phi_j(\mathbf{r}_i) \right) = \frac{1}{2} \sum_i q_i \phi'(\mathbf{r}_i) , \end{aligned} \quad (3.24)$$

onde $\phi' = \sum_{j \neq i} \phi_j$.

Portanto, podemos estabelecer a seguinte relação entre energia elétrica do campo e energia elétrica das cargas, para

- partículas puntiformes

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathcal{V}} |\mathbf{E}|^2 dV = U_{auto} + \frac{1}{2} \sum_i q_i \phi'(\mathbf{r}_i) \quad (3.25)$$

- distribuição contínua de carga

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathcal{V}} |\mathbf{E}|^2 dV = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) dV . \quad (3.26)$$

3.8 Capacitância entre condutores

O princípio da superposição nos permite estabelecer relações bastante gerais e úteis entre carga e potencial num sistema formado por condutores, em quantidade e forma arbitrárias. Tais relações são chamadas de teoria geral da capacitância.

Consideremos, inicialmente, um único corpo condutor isolado no espaço. A relação entre sua carga e seu potencial é sempre linear, $Q = C\phi$, como pode ser verificado através da Eq. (3.20). A constante de proporcionalidade C é chamada capacitância do condutor e depende apenas de sua geometria (tamanho, forma, etc.) e do meio onde se encontra o condutor, no caso de dielétricos. No entanto, não depende da própria carga ou do potencial do condutor.

Invertendo a equação $Q = C\phi$ obtemos $\phi = PQ$, onde $P = C^{-1}$ também é uma constante com as características de C . Em seguida generalizamos o conceito de capacitância para um sistema arbitrário de condutores. Veremos que o sistema estará completamente caracterizado pelo tensor capacitância, que é determinado simplesmente pela geometria do sistema.

Por exemplo, a capacitância de um condutor esférico de raio R , isolado no vácuo, é simplesmente $C = 4\pi\epsilon_0 R$ no sistema MKS, independentemente de sua carga. Se introduzimos outro condutor esférico de raio R e carga oposta ao primeiro, mantendo-se uma distância $d \gg R$ entre os centros das esferas teremos uma nova capacitância para o sistema: $C = 2\pi\epsilon_0 \left(\frac{Rd}{d-R}\right)$. Note que $\lim_{d \rightarrow \infty} C = 2\pi\epsilon_0 R$, corresponde a um sistema formado por dois condutores esféricos não interagentes.

Consideremos um sistema formado por N condutores e levemos em conta o princípio da superposição. O potencial no primeiro condutor, ϕ_1 , é determinado por sua própria carga, Q_1 , e pelo potencial nele produzido pelos condutores vizinhos

$$\phi_1 = P_{11}Q_1 + P_{12}Q_2 + \cdots + P_{1N}Q_N ,$$

e analogamente para os outros condutores. Portanto, escrevemos para cada condutor

$$\phi_i = \sum_j P_{ij}Q_j , \quad (3.27)$$

onde os coeficientes P_{ij} são chamados coeficientes de potencial. Se invertemos o sistema linear de equações (3.27) obtemos

$$Q_i = \sum_j C_{ij}\phi_j , \quad (3.28)$$

onde os coeficientes C_{ij} são chamados coeficientes de capacitância.

Do ponto de vista da física, utilizando o tensor \mathbb{C} podemos imediatamente determinar a carga Q_i em cada condutor do sistema, se conhecemos os potenciais ϕ_i . Ou vice-versa, se utilizamos o tensor \mathbb{P} . A primeira situação, no entanto, é a que ocorre com maior frequência.

A energia do sistema de condutores pode ser escrita em termos de \mathbb{C} como

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \phi_i Q_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \phi_i C_{ij} \phi_j = \frac{1}{2} \phi^\top \mathbb{C} \phi . \quad (3.29)$$

A seguir demonstramos uma importante propriedade do tensor capacitância: ele deve ser simétrico, $C_{ij} = C_{ji}$. Para isso podemos utilizar a expressão (3.29). Aplicando a transposição ao escalar U

$$U^\top = \frac{1}{2} (\phi^\top \mathbb{C} \phi)^\top = \frac{1}{2} (\mathbb{C} \phi)^\top (\phi^\top)^\top = \frac{1}{2} \phi^\top \mathbb{C}^\top \phi = U ,$$

portanto $C_{ij} = C_{ji}$. Também poderíamos ter aplicado o Teorema da Reciprocidade de Green ².

²Melvin Schwartz, *Principles of Electrodynamics*.

Capítulo 4

Método das funções de Green

Podemos calcular o potencial eletrostático de duas maneiras distintas:

1. Forma diferencial, por meio da **Equação de Poisson**:

$$\nabla^2 \phi = \frac{-\rho}{\epsilon_0} .$$

Esta é uma equação diferencial não homogênea, cuja solução deve satisfazer condições de contorno. Entre as maneiras de encontrar o potencial $\phi(\mathbf{r})$, podemos:

- (a) usar o método da carga imagem,
- (b) representar a solução em série de funções especiais (autofunções),
- (c) usar algoritmos numéricos como diferenças finitas, etc.

2. Integração direta da **Equação de Coulomb**

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' . \quad (4.1)$$

No entanto a equação acima é útil apenas no espaço vazio, isto é, se $\rho(\mathbf{r})$ é completamente conhecida e representa toda a carga no volume \mathcal{V} . Na prática, não é possível conhecer toda a densidade de carga de um sistema físico. Portanto, para ser útil em problemas gerais, devemos incluir as condições de contorno no formalismo integral. Isso pode ser feito, de maneira elegante e abrangente, com o método de Green.

Por exemplo, para uma esfera carregada no vácuo temos as linhas de campo descritas pela fórmula

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} ,$$

ilustradas na Fig. 4.1. Se a esfera for colocada entre placas condutoras, devemos ter $\vec{E} \times \hat{n} = 0$ na superfície dos condutores. Portanto, nesse caso $\mathbf{E} \neq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$, pois devemos levar em conta a contribuição da carga induzida σ , que geralmente desconhecemos, para definir o campo resultante \mathbf{E} da Fig. 4.2. Apesar disso, sabemos que $\phi = \text{constante}$ nas placas metálicas (ou seja, $\vec{E} \times \hat{n} = 0$).

Adiante desenvolveremos um formalismo capaz de incluir os efeitos de condições de contorno na fórmula integral de Coulomb para o potencial (Eq. 4.1). Esse método é baseado nas Identidades de Green.

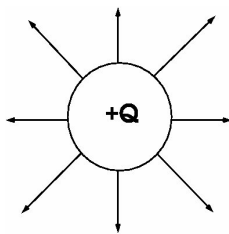


Figura 4.1: Linhas de campo elétrico produzidas no vácuo por uma distribuição de carga esfericamente simétrica.

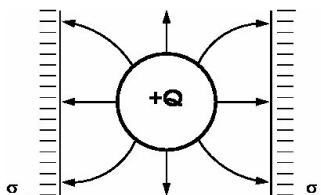


Figura 4.2: Linhas de campo elétrico produzidas por uma distribuição de carga esfericamente simétrica entre placas condutoras.

4.1 Identidades de Green

O método foi desenvolvido por George Green (matemático inglês, 1793-1841) em trabalho intitulado “*An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*”. Atualmente, as funções de Green são amplamente empregadas na solução de equações diferenciais não homogêneas sujeitas a condições de contorno. Embora tenha sido inicialmente aplicado ao eletromagnetismo, o método das funções de Green é bastante poderoso e geral, sendo empregado em diversas áreas da física. A seguir derivamos as identidades matemáticas que constituem a base do formalismo, para depois aplicá-lo ao problema do eletromagnetismo.

Consideremos um volume \mathcal{V} , limitado por uma superfície fechada \mathcal{S} . Nesse domínio definimos o campo vetorial arbitrário \vec{A} , que representamos da maneira

$$\vec{A} = \phi \nabla \psi, \tag{4.2}$$

com ϕ e ψ representando dois campos escalares com primeira e segunda derivadas contínuas. Assim, para $\vec{A} = \phi \nabla \psi$ temos

$$\nabla \cdot \vec{A} = \nabla(\phi \nabla \psi) = \nabla \phi \cdot \nabla \psi + \phi \nabla^2 \psi$$

Aplicando o Teorema da Divergência

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \vec{A} \, dV = \oint_{\mathcal{S}} \vec{A} \cdot \hat{n} \, dS,$$

obtemos

$$\int_{\mathcal{V}} [\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi] dV = \oint_{\mathcal{S}} (\phi \nabla \psi) \cdot \hat{n} \, dS$$

mas $\hat{n} \cdot \nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial n}$ é a derivada direcional de $\psi(\mathbf{r})$ na direção perpendicular à superfície \mathcal{S} , tal que

$$\phi (\hat{n} \cdot \nabla \psi) = \phi \frac{\partial \psi}{\partial n}.$$

É importante observar que \hat{n} aponta para fora do domínio \mathcal{V} que nos interessa. Obtemos, então, a Primeira Fórmula (Identidade) de Green

$$\int_{\mathcal{V}} [\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi] dV = \oint_S \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS . \quad (4.3)$$

Se trocarmos a ordem dos campos escalares em (4.2) temos o vetor $\vec{B} = \psi \nabla \phi$. Fazendo $\nabla \vec{B} = \psi \nabla^2 \phi + \nabla \psi \cdot \nabla \phi$ e aplicando o teorema da divergência obtemos, analogamente, a expressão

$$\int_{\mathcal{V}} [\psi \nabla^2 \phi + \nabla \psi \cdot \nabla \phi] dV = \oint_S \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS . \quad (4.4)$$

Subtraindo as expressões (4.3) e (4.4), encontra-se a Segunda Fórmula (Identidade) de Green

$$\int_{\mathcal{V}} [\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi] dV = \oint_S \left[\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] dS . \quad (4.5)$$

\implies Função de Green para o operador Laplaceano ∇^2 :

Vimos que a equação

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ,$$

denominada equação de Green para o operador Laplaceano, é satisfeita pela função

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ,$$

na ausência de condições de contorno. Denominamos $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ função de Green do operador Laplaceano, mas de maneira geral temos $\hat{\mathcal{L}}G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, onde $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ é a função de Green do operador linear $\hat{\mathcal{L}}$, sujeito às condições de contorno apropriadas. Por exemplo,

$$\nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 4\pi \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') .$$

onde

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ,$$

na ausência de condições de contorno. \longleftarrow

Podemos utilizar as propriedades da função de Green para obter um corolário importante da Segunda Fórmula de Green (4.5). Se fizermos $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \equiv G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ na fórmula (4.5), onde $\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, podemos reescrevê-la como

$$\int_{\mathcal{V}} [\phi(\mathbf{r}') \nabla'^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla'^2 \phi(\mathbf{r}')] dV' = \oint_S \left[\phi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \phi(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} \right] dS' .$$

Note que integramos sobre a variável \mathbf{r}' , enquanto \mathbf{r} é tratado como um parâmetro que designa o ponto de observação (medida) do campo. Aplicando as propriedades de $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$

$$\int_{\mathcal{V}} \{ \phi(\mathbf{r}') [-4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla'^2 \phi(\mathbf{r}') \} dV' = \oint_S \left[\phi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \phi(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} \right] dS'$$

obtemos uma expressão para o campo ϕ no ponto \mathbf{r} , que leva em conta o comportamento de $\phi(\mathbf{r}')$ e $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ na fronteira \mathcal{S}

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla'^2 \phi(\mathbf{r}') dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_{\mathcal{S}} \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \phi(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} - \phi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} \right] dS' . \quad (4.6)$$

Note que a integral é feita sobre a variável \mathbf{r}' , assim como as derivadas.

⇒ Conexão com o campo Eletrostático

Se $\phi(\mathbf{r})$ é solução da Equação de Poisson

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} ,$$

onde ρ é a densidade de carga, a Fórmula de Green torna-se

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_{\mathcal{S}} \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \phi(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} - \phi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} \right] dS' . \quad (4.7)$$

O primeiro termo do lado direito da igualdade contém a contribuição das fontes de carga. Esse termo descreve completamente o potencial no caso em que \mathcal{S} está localizada no infinito. O segundo membro, composto por dois termos, descreve a contribuição das condições de contorno. Sendo assim, na ausência de cargas $\rho(\mathbf{r}') = 0$, o potencial em \mathcal{V} é determinado por uma das condições de contorno

$$\phi|_{\mathcal{S}} \quad \text{ou} \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{\mathcal{S}} .$$

Caso \mathcal{S} represente a superfície de um condutor ideal, temos $\hat{n} \cdot \mathbf{E}|_{\mathcal{S}} = -\hat{n} \cdot \nabla \phi|_{\mathcal{S}} = -\frac{\partial \phi}{\partial n}|_{\mathcal{S}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, onde σ é a densidade superficial de carga e

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oint_{\mathcal{S}} \sigma(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' - \frac{1}{4\pi} \oint_{\mathcal{S}} \phi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} dS' . \quad (4.8)$$

Contudo, como foi sugerido acima, resta adaptar a Eq. (4.8) às condições de contorno apropriadas ao particular problema, como será discutido adiante. ⇐

⇒ Para um caso geral, onde

$$\widehat{\mathcal{L}}G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

e

$$\widehat{\mathcal{L}}\phi(\mathbf{r}') = f(\mathbf{r}')$$

temos

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{V}} f(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' + \oint_{\mathcal{S}} \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \phi(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} - \phi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} \right] dS'$$

De acordo com as equações acima, a função $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ está “super-determinada”, pois temos as condições de contorno $\phi(\mathcal{S})$ e $\partial\phi(\mathcal{S})/\partial n$ simultaneamente definidas no mesmo ponto, o que as torna linearmente dependentes. Devemos usar a liberdade que temos para definir $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ e eliminar uma das condições em favor da outra, de acordo com as particularidades do problema.

⇐

4.2 Condições de Contorno da Função de Green

A função de Green do operador Laplaceano

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

não satisfaz, em princípio, as condições de contorno de Dirichlet ou Neumann, a menos que $\mathcal{S} \rightarrow \infty$. Para que a função de Green satisfaça as condições de contorno apropriadas devemos ter

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') , \quad (4.9)$$

com

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

e

$$\nabla^2 F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 ,$$

onde $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ é solução da equação homogênea de Laplace. Podemos somar a função $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ à função de Green original sem prejuízo à Eq. (4.9), porque ∇^2 é um operador linear. Portanto a função $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ pode ser ajustada para que $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ satisfaça apenas uma das condições de contorno, associadas à $\phi(\mathcal{S})$ ou $\frac{\partial\phi(\mathcal{S})}{\partial n}$, como veremos a seguir.

Em síntese, o termo $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ é determinado pela carga unitária em \mathbf{r}' , dentro de \mathcal{V} . Porém $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ é determinado por uma distribuição de carga “fictícia”, fora de \mathcal{V} . Toda a carga dentro de \mathcal{V} é determinada pela distribuição de carga real $\rho(\mathbf{r}')$. Em alguns casos, a carga fictícia pode estar associada à carga imagem induzida em \mathcal{S} por ρ .

Portanto, é preciso determinar $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ para que $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ satisfaça às condições de contorno.

4.2.1 Condições de Dirichlet: $\phi(\mathbf{r}')$ determinado.

Nesse caso fazemos $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$ para $\mathbf{r}' \in \mathcal{S}$, pois conhecemos o valor do potencial ϕ na superfície \mathcal{S} . Conseqüentemente, o outro termo da integral de superfície se anula resultando numa expressão que determina completa e univocamente o potencial

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' - \frac{1}{4\pi} \oint_{\mathcal{S}} \phi(\mathbf{r}') \frac{\partial G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} dS' .$$

Essa é a situação mais comum em problemas de eletrostática, pois as superfícies dos condutores são equipotenciais. Veremos adiante que $G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$, pois $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ é simétrica com relação à troca de variáveis.

4.2.2 Condições de Neumann: $\left. \frac{\partial\phi}{\partial n} \right|_{\mathcal{S}}$ determinado.

Para as condições de Neumann, a opção mais simples, $\left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{\mathcal{S}} = 0$, não é consistente com as outras equações. Em primeiro lugar, integrando a Eq. (4.9) sobre todo o espaço temos

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' = -4\pi \int_{\mathcal{V}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' = -4\pi .$$

O mesmo resultado pode ser obtido aplicando-se o teorema da divergência

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla' [\nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] dV' = \oint_S \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}}' dS' = \oint_S \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} dS' = -4\pi, \quad (4.10)$$

que é consequência da estrutura 3D do espaço e pode ser interpretado como o fluxo devido a uma carga unitária. Contudo, $\frac{\partial G}{\partial n} \Big|_S = 0$ não satisfaz essa condição. A alternativa é escolhermos $\frac{\partial G}{\partial n'} = C = \text{constante}$, pois

$$\oint_S \underbrace{\frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'}}_C dS' = -4\pi \implies C \cdot \oint_S dS' = C \cdot S = -4\pi \implies C = \frac{-4\pi}{S}$$

onde S é a área da superfície. Portanto, no caso de condições de contorno de Neumann ficamos com

$$\frac{\partial G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} \Big|_S = \frac{-4\pi}{S}. \quad (4.11)$$

Note o sinal negativo em $\oint \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}'} dS' = -4\pi$, que resulta do fato de $\hat{\mathbf{n}}$ estar orientado para fora de \mathcal{S} e, portanto, $\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}'} = \frac{-\sigma}{\epsilon_0}$.

Utilizando $G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ na expressão do potencial tem-se

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_S G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \phi(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} dS' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \phi(\mathbf{r}') \underbrace{\frac{\partial G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'}}_{\frac{-4\pi}{S}} dS'$$

com

$$-\frac{1}{4\pi} \oint_S \phi(\mathbf{r}') \underbrace{\frac{\partial G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'}}_{\frac{-4\pi}{S}} dS' = \frac{-1}{4\pi} \cdot \frac{(-4\pi)}{S} \oint_S \phi(\mathbf{r}') dS' = \frac{1}{S} \oint_S \phi(\mathbf{r}') \equiv \langle \phi_s \rangle$$

onde $\langle \phi_s \rangle$ é o valor médio (constante) do potencial na superfície \mathcal{S} . Podemos enfim redefinir o potencial

$$\phi(\mathbf{r}) - \langle \phi_s \rangle = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_S G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \phi(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} dS'. \quad (4.12)$$

Podemos ainda tomar $\langle \phi_s \rangle$ como referência e fazer $\langle \phi_s \rangle \rightarrow 0$.

O termo de superfície pode ser interpretado do ponto de vista da física como

$$\frac{1}{4\pi} \oint_S G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \phi(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} dS' = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \sigma(\mathbf{r}') G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS'$$

pois a condição de contorno de Neumann equivale a especificar a densidade superficial de carga σ em \mathcal{S} , pois

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} = E_n = \frac{-\partial \phi(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} \implies \sigma(\mathbf{r}') = -\epsilon_0 \frac{\partial \phi(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'}$$

\implies Condições de Cauchy

As condições de contorno de Cauchy são uma combinação linear das condições de Dirichlet e Neumann

$$a\phi|_S + b\frac{\partial\phi}{\partial n}\Big|_S \equiv \text{Cauchy}$$

Entretanto, como $\phi(\mathcal{S})$ e $\frac{\partial\phi(\mathcal{S})}{\partial n}$ não são independentes numa superfície fechada, esta condição de contorno não ocorre em problemas de eletrostática. \Leftarrow

4.3 Simetria das Funções de Green

Consideremos, por exemplo, o operador linear de Helmholtz $\widehat{\mathcal{L}} = \nabla^2 + k^2$, com k =constante, e as seguintes equações de Green

$$\left. \begin{aligned} \widehat{\mathcal{L}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \\ \widehat{\mathcal{L}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) \end{aligned} \right\} \text{ com } \mathbf{r}_1 \text{ e } \mathbf{r}_2 \text{ arbitrários em } \mathcal{V}.$$

Multiplicando a primeira equação por $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)$ e a segunda por $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$, subtraindo e integrando a expressão resultante na variável \mathbf{r} sobre o volume \mathcal{V}

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)\widehat{\mathcal{L}}G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)\widehat{\mathcal{L}}G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)] dV &= \int_{\mathcal{V}} [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)] dV \\ &= G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \end{aligned}$$

Por outro lado, se aplicarmos a segunda identidade de Green obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)\widehat{\mathcal{L}}G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)\widehat{\mathcal{L}}G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)] dV &= \int_{\mathcal{V}} [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)] dV \\ &= \oint_{\mathcal{S}} \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) \right] dS \end{aligned}$$

e, portanto,

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) = \oint_{\mathcal{S}} \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) \right] dS$$

Se a função de Green satisfaz condições de contorno:

a) Dirichlet $\Rightarrow G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$ para $\mathbf{r} \in \mathcal{S} \Rightarrow G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$

b) Neumann $\Rightarrow \frac{\partial G_N}{\partial n} = \text{constante}$ para $\mathbf{r} \in \mathcal{S}$ não garante simetria. Mas se impusermos ainda que $\oint_{\mathcal{S}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS = 0$, então recuperamos a simetria $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$.

4.4 Unicidade de $\phi(\mathbf{r})$ em \mathcal{V}

Verificamos em seguida que as condições de contorno de Dirichlet ou Neumann, independentemente, determinam $\phi(\mathbf{r})$ univocamente.

Considere duas possíveis soluções para o potencial $\phi_1(\mathbf{r})$ e $\phi_2(\mathbf{r})$, que satisfazem

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \phi_1(\mathbf{r}) &= \frac{-\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \\ \nabla^2 \phi_2(\mathbf{r}) &= \frac{-\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \end{aligned} \right\} \implies \nabla^2(\phi_1 - \phi_2) = 0, \quad (4.13)$$

para a mesma distribuição de carga ρ . Também temos, sobre a superfície de contorno \mathcal{S}

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= \phi_2 \\ \text{ou} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial n} &= \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \end{aligned} \right\}$$

dependendo do problema.

Definindo $u = \phi_1 - \phi_2$ e aplicando a primeira fórmula de Green

$$\int_{\mathcal{V}} [u \nabla^2 u + (\nabla u) \cdot (\nabla u)] dV = \oint_{\mathcal{S}} u \frac{\partial u}{\partial n} dS.$$

Mas, em razão de (4.13), $\nabla^2 u = \nabla^2(\phi_1 - \phi_2) = 0$. Portanto

$$\int_{\mathcal{V}} (\nabla u)^2 dV = \oint_{\mathcal{S}} u \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

Para cada tipo de condição de contorno temos:

- Dirichlet:

$$\phi_1(\mathcal{S}) = \phi_2(\mathcal{S}) \longrightarrow u(\mathcal{S}) = 0 \longrightarrow \nabla u = 0 \longrightarrow u = \text{const},$$

mas se $u = 0$ em $\mathcal{S} \Rightarrow \phi_1 = \phi_2$ dentro de \mathcal{S} , ou seja em \mathcal{V} .

- Neumann:

$$\left. \frac{\partial \phi_1}{\partial n} \right|_{\mathcal{S}} = \left. \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \right|_{\mathcal{S}} \longrightarrow \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\mathcal{S}} = 0 \longrightarrow u = \text{const}.$$

Nesse caso ϕ_1 e ϕ_2 podem diferir por apenas uma constante, isto é, $\phi_1 = \phi_2 + C$ e, portanto, os campos são equivalentes do ponto de vista físico.

Conclui-se, portanto, que qualquer função que satisfaça a Equação de Poisson e as condições de contorno é a única solução do problema, não importando a forma como foi obtida. Por essa razão podemos usar argumentos heurísticos, como o método da carga imagem, entre outros, para obter os campos. Se o *ansatz* utilizado satisfaz simultaneamente as equações do campo e as condições de contorno, então temos certeza que este é a solução correta para o problema.

Com base no mesmo argumento, também podemos usar pontos de observação de maior simetria para calcular $\phi(\mathbf{r})$, pois a forma da solução obtida corresponderá à solução do problema em todos os pontos do espaço. Tais aspectos serão ilustrados mais adiante no curso.

4.5 Resumo

Obtemos as seguintes expressões para o potencial $\phi(\mathbf{r})$ no caso das condições de contorno:

- Dirichlet: $\phi(s)$ conhecido

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \phi(\mathbf{r}') \frac{\partial G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} dS'$$

- Neumann: $\frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_S$ conhecido

$$\phi(\mathbf{r}) = \langle \phi \rangle_S + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_S G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \phi(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} dS'$$

Sabemos também que

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

com

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + F(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad \nabla'^2 F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$$

Podemos interpretar fisicamente a função de Green como uma densidade de solução, correspondente a uma densidade de perturbação (distribuição delta de Dirac). Pela propriedade da superposição a solução completa do problema é obtida pela soma (integral) dessas densidades de solução.

4.6 Apêndice:

Método da função de Green aplicado ao oscilador harmônico amortecido

Normalmente é difícil entender ou visualizar o método da função de Green aplicado a problemas de eletrostática, por causa da estrutura tridimensional dos campos. No entanto é instrutivo trabalhar um exemplo analítico para desenvolver a intuição. O oscilador harmônico amortecido é ideal para isso, pois pode ser modelado sem perda de generalidade para sistemas unidimensionais e apresenta solução analítica para alguns casos. Seguiremos um tratamento baseado na análise espectral das funções temporais, portanto definiremos abaixo a transformada de Fourier da função $f(t)$ e sua transformada inversa

$$g(w) = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{iwt} \tag{4.14}$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dw}{2\pi} g(w) e^{-iwt} \tag{4.15}$$

A equação para o oscilador harmônico amortecido sujeito a uma força externa é

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F(t) , \quad (4.16)$$

onde m é a massa da partícula, b seu parâmetro de atrito (dissipação) e k a constante elástica. Para a equação de Green podemos considerar a força externa como uma sucessão de impulsos

$$\left[m \frac{d^2}{dt^2} + b \frac{d}{dt} + k \right] G(t, t') = \delta(t - t') , \quad (4.17)$$

Escrevendo

$$G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dw}{2\pi} \tilde{G}(w) e^{-iwt} \quad e \quad F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dw}{2\pi} \tilde{F}(w) e^{-iwt} ,$$

a equação diferencial (4.17), inicialmente representada no domínio dos tempos, se transforma numa equação algébrica para a variável w

$$\tilde{G}(w) = \frac{\tilde{F}(w)}{-mw^2 - ibw + k} \equiv \frac{\tilde{F}(w)}{m[w_0 - w^2 - i2\beta w]} ,$$

com $w_0^2 = k/m$ e $\beta = b/2m$. Para o impulso $F(t) = \delta(t - t')$ temos

$$\tilde{F}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \delta(t - t') e^{iwt} = e^{-iwt'} ,$$

tal que

$$\tilde{G}(w) = \frac{e^{-iwt'}}{m[w_0 - w^2 - i\beta w]} .$$

Para obter a função de Green temporal efetuamos a transformada inversa em $\tilde{G}(w)$

$$\begin{aligned} G(t, t') &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dw}{2\pi} \tilde{G}(w) e^{-iwt} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dw}{2\pi} \frac{e^{-iw(t-t')}}{m[w_0 - w^2 - i\beta w]} \\ &= \frac{1}{mw_1} e^{-\beta(t-t')} \sin [w_1(t-t')] , \end{aligned} \quad (4.18)$$

com $w_1^2 = w_0^2 - \beta^2$. Para esse caso estamos admitindo como condições iniciais: $x(t=0) = 0$ e $\dot{x}(t=0) = 0$.

Temos então

$$G(t, t') = \begin{cases} \frac{1}{mw_1} e^{-\beta(t-t')} \sin [w_1(t-t')] & \text{para } t > t' \\ 0 & \text{para } t < t' \end{cases}$$

pois a função de Green é definida para tempos t posteriores ao impulso que ocorre em t' . Portanto, o comportamento do oscilador amortecido sujeito a uma força externa $F(t)$ é dado por

$$x(t) = \int_{-\infty}^t dt' F(t') G(t, t') . \quad (4.19)$$

Consideremos, por exemplo, uma força $F(t) = F_0 e^{-\gamma t}$, com $\gamma r > 0$, que age sobre o sistema em $t > 0$. Nesse caso

$$x(t) = \frac{F_0}{m w_1} \int_0^t dt' e^{-\beta(t-t')} \sin[w_1(t-t')] e^{-\gamma t'}$$

Fazendo $z = w_1(t-t')$ obtemos

$$x(t) = \frac{F_0}{m w_1^2} \int_0^{w_1 t} dz e^{-\gamma t} \exp\left[\frac{\gamma - \beta}{w_1} z\right] \sin(z) \tag{4.20}$$

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\gamma - \beta)^2 + w_1^2} \left[e^{-\gamma t} - e^{-\beta t} \left(\cos(w_1 t) - \frac{\gamma - \beta}{w_1} \sin(w_1 t) \right) \right] \tag{4.21}$$

A Figura (4.3) apresenta a dinâmica do oscilador harmônico amortecido (linha cheia), sujeito a uma força $F(t) = F_0 \exp[-\gamma t]$ (linha vermelha tracejada), segundo a Eq. (4.21), para vários valores de γ e β . Note que para o caso $\gamma = 3$, a dinâmica do oscilador é aproximadamente a dinâmica da função de Green, ou seja, o oscilador é tirado do equilíbrio por um impulso instantâneo.

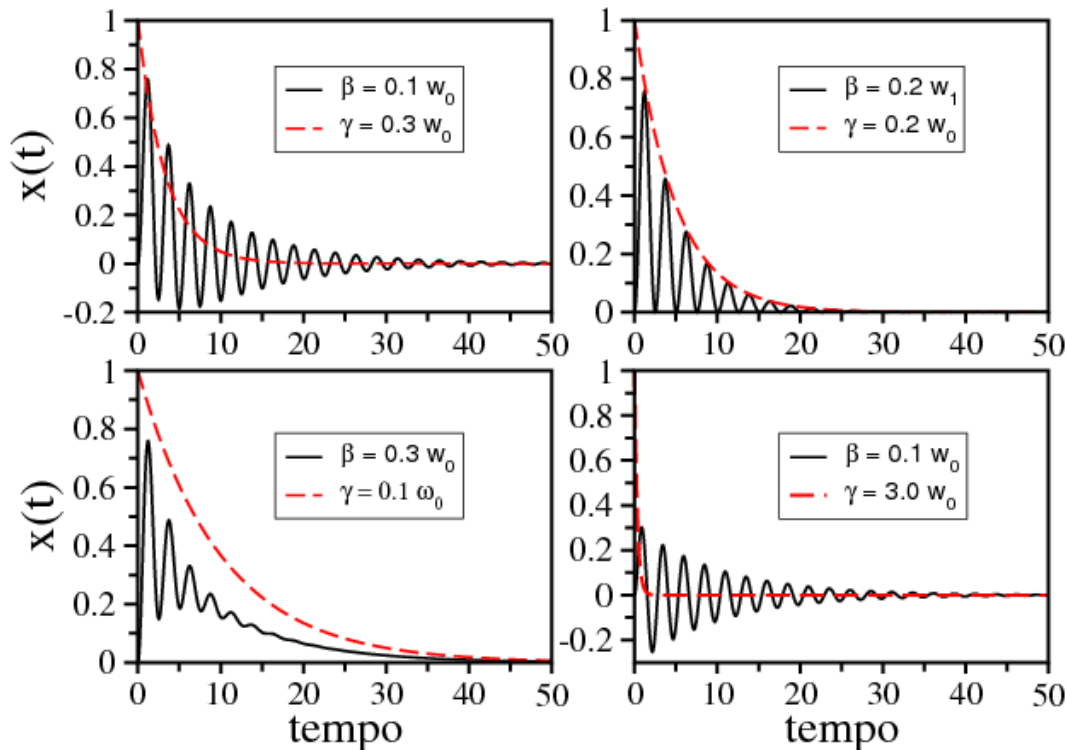


Figura 4.3: Dinâmica do oscilador harmônico amortecido (linha cheia), $x(t)$, sob ação de a uma força $F(t) = F_0 \exp[-\gamma t]$ (linha vermelha tracejada), para vários valores de γ e β .

Capítulo 5

Método da carga imagem

Esse é um método prático e bastante útil para se calcular o potencial produzido por cargas elétricas na presença de superfícies condutoras, em sistemas de grande simetria. O método se baseia nos seguintes princípios.

Consideremos um volume \mathcal{V} do espaço, associado à superfície \mathcal{S} , onde se pretende calcular o potencial ϕ . Primeiramente, o potencial deve satisfazer a equação de Poisson $\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon_0$ em todos os pontos de \mathcal{V} , onde $\rho \equiv \rho_{real}$ é a densidade de carga real do sistema, localizada no interior de \mathcal{S} . Simultaneamente, o potencial ϕ deve obedecer condições de contorno em \mathcal{S} . Nem sempre é simples resolver esse problema por métodos tradicionais, mas se o sistema apresenta uma simetria favorável podemos usar um artifício para resolvê-lo. Supomos que existe uma densidade de carga imagem ρ_{im} , localizada fora de \mathcal{V} , tal que o potencial resultante $\phi = \phi_{real} + \phi_{im}$ satisfaz as condições de contorno em \mathcal{S} e a equação de Poisson em \mathcal{V}

$$\nabla^2\phi = \nabla^2\phi_{real} + \nabla^2\phi_{im} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} . \quad (5.1)$$

Note que ϕ_{im} é solução da Equação de Laplace em \mathcal{V} . Por fim, o teorema da unicidade nos garante que ϕ , calculado por esse método, é a verdadeira solução do problema.

No contexto das funções de Green, o potencial produzido pela carga imagem está associado à função $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, pois

$$\nabla^2 F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad \text{em } \mathcal{V} .$$

Lembrando que $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ é responsável por fazer $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ satisfazer as condições de contorno do problema.

O método da carga imagem não está limitado à sistemas com superfícies condutoras, mas também pode ser aplicado em problemas envolvendo dielétricos.

5.1 Carga imagem num plano condutor infinito

Considere o sistema físico ilustrado na Figura 5.1, que mostra uma carga pontual q próxima a um plano condutor infinito situado em $x = 0$. Pretendemos calcular o potencial ϕ em todos os pontos onde $x > 0$. Essa região define o volume de interesse \mathcal{V} , onde a equação de Poisson (5.1) deve ser satisfeita. Além disso, temos: (i) o plano metálico em $x = 0$ é uma superfície equipotencial; (ii) a carga q induz uma densidade superficial de carga σ , de sinal contrário, no plano condutor; (iii) a componente de \vec{E} paralela ao plano metálico deve ser nula.

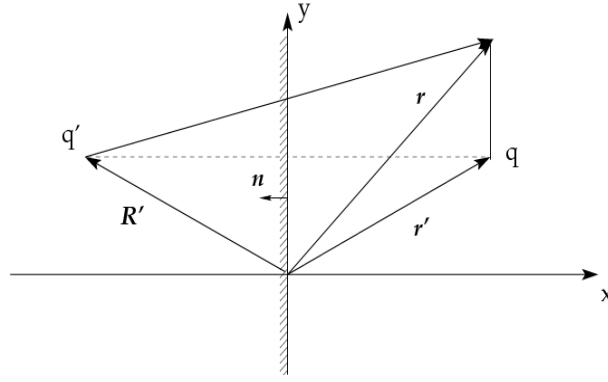


Figura 5.1: Carga pontual q em frente a um plano condutor infinito em $x = 0$. A carga imagem é q' .

Na ausência do plano condutor o potencial elétrico em $\mathbf{r} > 0$ seria

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} .$$

A presença do plano metálico impõe a condição de contorno descrita acima. Para satisfazê-la basta assumir a presença de uma carga fictícia (carga imagem) de valor $q' = -q$ na posição $\mathbf{R}' = (-x', y', z')$. \mathbf{R}' é dado por uma operação de reflexão sobre \mathbf{r}' em relação ao plano $x = 0$.

Assim, temos para o potencial na região \mathcal{V} , ou seja, em $x \geq 0$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{q}{|\mathbf{r} - \vec{R}'|} \right\} . \quad (5.2)$$

O potencial em $x < 0$ não nos interessa. Reescrevendo $\phi(\mathbf{r})$ em termos das coordenadas da carga real ($\{x', y', z'\}$), obtemos

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}} - \frac{1}{[(x + x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}} \right\} . \quad (5.3)$$

Por construção o *ansatz* introduzido pela Eq. (5.2) satisfaz a condição de contorno em $\phi(x = 0) = 0$, para quaisquer y, z e \mathbf{r}' , como pode ser verificado prontamente em (5.3). Além disso, utilizando as propriedades da função delta de Dirac, verifica-se que o potencial ϕ em (5.2) é solução da equação $\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon_0$ em $x \geq 0$. Portanto, sabemos que *ansatz* descreve corretamente o potencial na região de interesse.

Podemos, então, calcular *a posteriori* a densidade superficial de carga $\sigma(y, z)$ em $x = 0$ usando a relação $E_n = \sigma/\epsilon_0$, válida para a superfície do condutor. Para isso fazemos

$$\sigma(y, z) = \epsilon_0 E_n(x = 0, y, z) = \epsilon_0 \hat{x} \cdot (-\nabla\phi)|_{x=0} = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial\phi}{\partial x} \right|_{x=0} \quad (5.4)$$

$$= \frac{-q x'}{2\pi} \frac{1}{[x'^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} . \quad (5.5)$$

Integrando σ sobre toda a superfície metálica, fazendo $y' = z' = 0$ pois a superfície é infinita, obtemos

$$q' = \int_s \sigma da = \frac{-q x'}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \frac{\rho d\rho}{[x'^2 + \rho^2]^{3/2}} , \text{ com } y^2 + z^2 \equiv \rho^2$$

$$= -q x' \int_0^\infty \frac{\rho d\rho}{[x'^2 + \rho^2]^{3/2}}, \quad \text{mas } u = x'^2 + \rho^2 \quad e \quad du = 2\rho d\rho$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{2\rho d\rho}{[x'^2 + \rho^2]^{3/2}} = \frac{1}{2} \int u^{-\frac{3}{2}} du = \frac{1}{2} \frac{u}{(-\frac{1}{2})} = -u^{-\frac{1}{2}}$$

Então

$$q' = -q x' (-u^{-\frac{1}{2}})|_0^\infty = -q x' \frac{(-1)}{[x'^2 + \rho^2]^{1/2}} \Big|_{\rho=0}^{\rho=\infty} = -q$$

⇒ Contato com o método de Green:

A função de Green para esse problema é

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' + 2x' \hat{i}|}, \quad (5.6)$$

ou ainda

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')]^{1/2}} - \frac{1}{[(x + x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')]^{1/2}}. \quad (5.7)$$

É fácil verificar que as propriedades da função de Green são satisfeitas:

- $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in S) = 0$ e $G(\mathbf{r} \in S, \mathbf{r}') = 0$,
- $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}', \mathbf{r})$,
- o segundo termo de $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ em (5.6), ou (5.7), corresponde à função $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, que satisfaz $\nabla^2 F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$ em \mathcal{V} .

Por fim, o potencial é dado por

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}') G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' - \overbrace{\frac{1}{4\pi} \oint_s \phi(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS'}^{0, \text{ pois } \phi(S)=0} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}') G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' \end{aligned}$$

Mas a densidade de carga é $\rho(\mathbf{r}') = q \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_q)$, onde \mathbf{r}' é a variável de integração e \mathbf{r}_q é a posição da carga pontual q . Portanto

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int q \delta(\mathbf{r}', \mathbf{r}_q) \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' + 2x' \hat{i}|} \right\} dV' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_q|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q + 2x_q \hat{i}|} \right\},$$

em acordo com a Eq. (5.2) ⇐

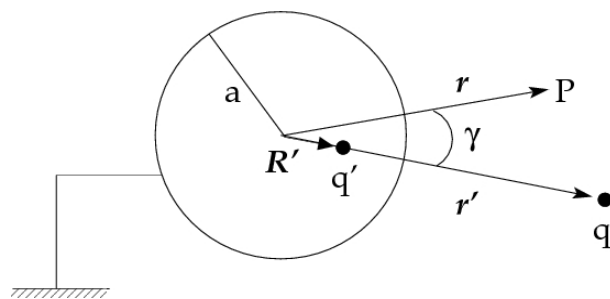


Figura 5.2: Carga pontual q nas proximidades de uma esfera condutora de raio a mantida em um potencial nulo. A carga imagem é q' . O observador calcula o campo no ponto \mathbf{P} .

5.2 Carga imagem numa esfera condutora

5.2.1 Esfera condutora aterrada

A figura 5.2 ilustra um sistema formado por uma carga pontual q , localizada pelo vetor posição \mathbf{r}' , nas proximidades de uma esfera condutora ideal de raio a . Inicialmente, supomos que a esfera é mantida num potencial nulo, $\phi_{esfera} = 0$. Os mesmos princípios físicos, discutidos no contexto da seção anterior, se aplicam a esse caso. Desejamos calcular o potencial elétrico ϕ em todos os pontos do espaço fora da esfera e a densidade de carga induzida na esfera.

Do ponto de vista matemático, o volume \mathcal{V} , onde definimos a equação de Poisson, compreende todo o espaço fora da esfera condutora. Portanto o vetor normal $\hat{\mathbf{n}}$ à superfície \mathcal{S} aponta para dentro da esfera.

Por simetria a carga fictícia (imagem) deve se localizar ao longo do mesmo raio vetor $\hat{\mathbf{n}}' = \mathbf{r}'/r'$ que a carga real q , mas dentro da esfera, ou seja, em $\mathbf{R}' = R'\hat{\mathbf{n}}'$, com $R' < a$ (fora da região \mathcal{V}).

Portanto, escrevemos para o potencial fora da esfera

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{q'}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}'|} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{|r\hat{\mathbf{n}} - r'\hat{\mathbf{n}}'|} + \frac{q'}{|r\hat{\mathbf{n}} - R'\hat{\mathbf{n}}'|} \right], \quad (5.8)$$

com

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad \text{e} \quad \hat{\mathbf{n}}' = \frac{\mathbf{R}'}{R'} = \frac{\mathbf{r}'}{r'}$$

As condições de contorno são $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi = 0$ e $\phi(r = a) = 0$. O *ansatz* (5.8) satisfaz naturalmente a primeira delas. Precisamos, então, determinar q' e R' para satisfazer a segunda condição. Para isso fazemos

$$\begin{aligned} \phi(r = a) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{|a\hat{\mathbf{n}} - r'\hat{\mathbf{n}}'|} + \frac{q'}{|a\hat{\mathbf{n}} - R'\hat{\mathbf{n}}'|} \right] = 0 \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q/a}{|\hat{\mathbf{n}} - \frac{r'}{a}\hat{\mathbf{n}}'|} + \frac{q'/R'}{|\hat{\mathbf{n}}' - \frac{a}{R'}\hat{\mathbf{n}}'|} \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

mas

$$\begin{aligned}
 \left| \hat{\mathbf{n}} - \frac{r'}{a} \hat{\mathbf{n}}' \right|^2 &= \left(\hat{\mathbf{n}} - \frac{r'}{a} \hat{\mathbf{n}}' \right) \cdot \left(\hat{\mathbf{n}} - \frac{r'}{a} \hat{\mathbf{n}}' \right) \\
 &= 1 + \left(\frac{r'}{a} \right)^2 - 2 \frac{r'}{a} \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}' \\
 &= 1 + \left(\frac{r'}{a} \right)^2 - 2 \frac{r'}{a} \cos\gamma,
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

com

$$\begin{aligned}
 \cos\gamma &= \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}' = |\hat{\mathbf{n}}| \cdot |\hat{\mathbf{n}}'| \cos(\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{n}}') \\
 &= (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta) \cdot (\sin\theta' \cos\varphi', \sin\theta' \sin\varphi', \cos\theta') \\
 &= \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\varphi - \varphi')
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Igualmente, temos

$$\left| \hat{\mathbf{n}}' - \frac{a}{R'} \hat{\mathbf{n}} \right|^2 = 1 + \left(\frac{a}{R'} \right)^2 - 2 \frac{a}{R'} \cos\gamma. \tag{5.12}$$

Utilizamos esses resultados para reescrever a Eq. (5.9)

$$\phi(r = a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q/a}{\left[1 + \left(\frac{r'}{a} \right)^2 - 2 \frac{r'}{a} \cos\gamma \right]^{\frac{1}{2}}} + \frac{q'/R'}{\left[1 + \left(\frac{a}{R'} \right)^2 - 2 \frac{a}{R'} \cos\gamma \right]^{\frac{1}{2}}} \right\} = 0.$$

Para que a equação seja satisfeita basta fazer

$$\frac{q}{a} = -\frac{q'}{R'} \quad \frac{r'}{a} = \frac{a}{R'},$$

ou ainda,

$$q' = -q \frac{a}{r'} \quad R' r' = a^2. \tag{5.13}$$

O princípio da unicidade nos garante que o potencial (5.8), juntamente com as relações (5.13), formam a verdadeira solução para o problema. Note o comportamento da solução nos seguintes casos limites:

- se $r' \rightarrow \infty$, então $R' \rightarrow 0$ e $q' \rightarrow 0$,
- se $r' \rightarrow a$, então $R' \rightarrow a$ e $q' \rightarrow -q$.

Enfim, temos para a expressão do potencial fora da esfera

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{a/r'}{|\mathbf{r} - \frac{a^2}{r'} \hat{\mathbf{n}}'|} \right], \tag{5.14}$$

quando q é uma carga pontual. O princípio da superposição pode ser utilizado para generalizar esse resultado para o caso de uma distribuição arbitrária de carga fora da esfera.

⇒ Contato com o método de Green:

Podemos verificar que a seguinte função de Green $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ satisfaz as condições de contorno de Dirichlet, $G_D(\mathbf{r}, |\mathbf{r}'| = a) = 0$, em toda superfície da esfera

$$\begin{aligned} G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{a/r'}{|\mathbf{r} - \frac{a^2}{r'} \hat{\mathbf{n}}'|} \\ &= \frac{1}{[r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\gamma]^{1/2}} - \frac{a/r'}{[r^2 + (\frac{a^2}{r'})^2 - 2r\frac{a^2}{r'} \cos\gamma]^{1/2}} . \end{aligned} \quad (5.15)$$

Além disso temos:

- $G_D(|\mathbf{r}| = a, \mathbf{r}') = 0$,
- $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r})$.

Para uma distribuição arbitrária de carga $\rho(\mathbf{r}')$ fora da esfera, dadas as condições de contorno de Dirichlet na superfície da esfera, temos

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \phi(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' .$$

Mas $\phi(r' = a) = 0$ na esfera. Então ficamos somente com

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' , \quad (5.16)$$

com $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ dado pela Eq. (5.15). Utilizando $\rho(\mathbf{r}') = q\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_q)$ na expressão (5.16), recuperamos o resultado da Eq. (5.14). ←

Conhecendo-se o potencial $\phi(\mathbf{r})$ é possível obter $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ e, posteriormente, determinar a densidade de carga induzida na superfície da esfera através da fórmula $\sigma = \epsilon_0 E_n$. Note que E_n é a projeção normal do campo \mathbf{E} sobre o condutor, apontando para fora da esfera

$$\sigma = \epsilon_0 (-\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \nabla\phi(\mathbf{r})) \Big|_{r=a} . \quad (5.17)$$

Note a relação desse termo com o termo de superfície da fórmula de Green

$$\hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial n'} ,$$

onde $\hat{\mathbf{n}}' = -\hat{\mathbf{e}}_r$ para a geometria do nosso problema, portanto $\partial/\partial n' = -\partial/\partial r'$.

Calculando a expressão (5.17), obtemos a seguinte distribuição superficial de carga

$$\begin{aligned} \sigma(\theta, \varphi) &= -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial r} \phi(\mathbf{r}) \Big|_{r=a} \\ &= -\frac{q}{4\pi} \cdot \left(\frac{r'^2 - a^2}{a} \right) \cdot \frac{1}{[a^2 + r'^2 - 2ar' \cos\gamma]^{3/2}} , \end{aligned} \quad (5.18)$$

com $\cos\gamma$ dado por (5.11). Ao integrar a densidade de carga $\sigma(\theta, \varphi)$ sobre toda a esfera podemos fazer $\mathbf{r}' \parallel \hat{\mathbf{z}}$, tal que $\gamma \equiv \theta$, e obtemos

$$q' = \int_S \sigma(\theta, \varphi) dS = \int_S \sigma(\theta, \varphi) a^2 d\Omega = -\frac{a}{r'} q . \quad (5.19)$$

A equação 5.19 pode ser interpretada como a fórmula integral de Gauss aplicada ao fluxo de campo produzido pela carga imagem dentro da esfera. Nesse caso a carga induzida depende da geometria do sistema, ou seja, depende do raio da esfera condutora, a , e de sua distância r' com relação à carga real q . É instrutivo verificar os casos limites de (5.19), para $r' \rightarrow \infty$ e $r' \rightarrow a$.

Se quisermos calcular a força entre a esfera condutora e a carga q , basta determinar o campo produzido pela carga imagem na posição de q . A força será então

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= q\mathbf{E}(\mathbf{r}') \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot q'}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}'|^2} \hat{\mathbf{n}}' . \end{aligned} \quad (5.20)$$

Mas $q' = -(a/r')q$ e $R' = a^2/r'$, portanto

$$|\mathbf{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 a}{r'^3 |1 - a^2/r'^2|^2} .$$

5.2.2 Esfera condutora mantida em um potencial V

Consideremos um sistema similar ao ilustrado pela Figura 5.2, porém com a esfera condutora mantida em um potencial V . Como o potencial na superfície da esfera é mantido constante a carga pode variar e depende de V . Consideramos o esquema e o raciocínio desenvolvidos no problema anterior

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{q'}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}'|} \right] + \phi_3 , \end{aligned} \quad (5.21)$$

Sabemos que o primeiro termo no lado direito de (5.21) satisfaz a condição de contorno

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{q'}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}'|} \right] \Bigg|_{r=a} = 0 \quad (5.22)$$

para $q' = -aq/r'$ e $R' = a^2/r'$. Precisamos, então encontrar ϕ_3 que para que o potencial (5.21) obedeça o vínculo $\phi(r=a) = V = \text{constante}$. Essa condição é prontamente satisfeita se escolhemos

$$\phi_3(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q''}{r} ,$$

com $q'' = 4\pi\epsilon_0 Va$.

Temos finalmente o potencial

$$\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{qa/r'}{|\mathbf{r} - \frac{a^2}{r'} \hat{\mathbf{n}}'|} \right] + \frac{Va}{r} , \quad (5.23)$$

que satisfaz as condições de contorno. Quanto à equação diferencial de Poisson obtemos

$$\nabla^2\phi = \nabla^2\phi_1 + \nabla^2\phi_2 + \nabla^2\phi_3 = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') ,$$

no volume \mathcal{V} , que corresponde a uma carga pontual real em \mathbf{r}' , além da carga imagem descrita por $q' = -\frac{a}{r'}q$ e $R' = a^2/r'$ e da carga residual $q'' = (4\pi\epsilon_0 Va)$.

⇒ Contato com o método de Green:

Para esse sistema utilizamos a função de Green

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{a/r'}{|\mathbf{r} - \frac{a^2}{r'} \hat{\mathbf{n}}'|}$$

que satisfaz as condições de contorno de Dirichlet $G_D(\mathbf{r}, |\mathbf{r}'| = a) = 0$ em toda superfície da esfera.

O potencial na região \mathcal{V} , descrito pelo método de Green, levando-se em conta as condições de contorno (fazendo $r' = a$ na integral de superfície), é dado por

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \phi(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_q) G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' - \frac{1}{4\pi} \oint_S V \left[- \left(\frac{r^2 - a^2}{a} \right) \frac{1}{[r^2 + a^2 - 2ra \cos \gamma]^{3/2}} \right] a^2 d\Omega' \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}_q) - \frac{V}{4\pi} \left(\frac{-a 4\pi}{r} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}_q) + \frac{Va}{r} , \end{aligned} \tag{5.24}$$

em acordo com a expressão (5.23). ⇐

5.2.3 Esfera isolada

Nesse caso a esfera metálica ilustrada na Figura 5.2 está isolada e carregada com carga total Q . Os vínculos que devem ser satisfeitos são os seguintes:

- a) a carga pontual q induz uma distribuição de carga na superfície da esfera,
- b) a carga Q na esfera é constante,
- c) o potencial na esfera metálica é constante, porém desconhecido em princípio.

Dos problemas anteriores, sabemos que a carga imagem q' satisfaz os vínculos a) e c), portanto escrevemos

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{q'}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}'|} \right] + \phi_3 . \end{aligned} \tag{5.25}$$

A condição de contorno mais evidente nesse problema é a constância da carga total da esfera, representada pela expressão

$$Q = \oint_S \sigma(\theta, \varphi) dS = -\epsilon_0 \oint_S \frac{\partial \phi}{\partial r} dS = -\epsilon_0 \oint_S \frac{\partial \phi}{\partial n} dS . \tag{5.26}$$

com ϕ dado por (5.25). Aproveitando os resultados (5.18) e (5.19), ficamos com

$$Q = \frac{-a}{r'}q - \epsilon_0 \oint_S \frac{\partial \phi_3}{\partial r} dS . \quad (5.27)$$

Então precisamos encontrar ϕ_3 que obedeça a igualdade

$$\oint_S \frac{\partial \phi_3}{\partial r} a^2 d\Omega = -\frac{1}{\epsilon_0} \left(Q + \frac{aq}{r'} \right) . \quad (5.28)$$

A maneira mais simples de satisfazer (5.28) é fazer

$$\phi_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q''}{r} , \quad (5.29)$$

com $q'' = Q + (aq)/r'$, tal que

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{qa/r'}{|\mathbf{r} - \frac{a^2}{r'}\hat{\mathbf{n}}'|} + \frac{Q + qa/r'}{r} \right] . \quad (5.30)$$

Assim como no exemplo anterior, o potencial resultante satisfaz a Equação de Poisson em \mathcal{V} , $\nabla^2\phi = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Portanto, temos certeza (5.30) é a verdadeira solução do problema.

Em $|\mathbf{r}| = a$, o potencial da esfera deve ser

$$\phi(a, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q + qa/r'}{a} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{a} + \frac{q}{r'} \right] ,$$

com os seguintes casos limites:

- $\lim_{r' \rightarrow \infty} \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a}$
- $\lim_{r' \rightarrow a} \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left\{ \frac{Q + q}{a} \right\}$

Portanto, o potencial ϕ produzido pela esfera carregada consiste da soma de dois termos: o potencial produzido pela carga imagem q' localizada em \mathbf{R}' e o potencial produzido por uma esfera com carga $q'' = Q - q'$. Note que q'' pode ser positivo ou negativo.

\implies Contato com o método de Green:

Temos a função de Green

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{a/r'}{|\mathbf{r} - \frac{a^2}{r'}\hat{\mathbf{n}}'|}$$

que satisfaz as condições de contorno de Dirichlet $G_D(\mathbf{r}, |\mathbf{r}'| = a) = 0$ em toda superfície da esfera.

O potencial na região \mathcal{V} , descrito pelo método de Green, é dado por

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \phi(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}_q) + \phi_{esfera}(\mathbf{r}_q) \frac{a}{r} \end{aligned} \quad (5.31)$$

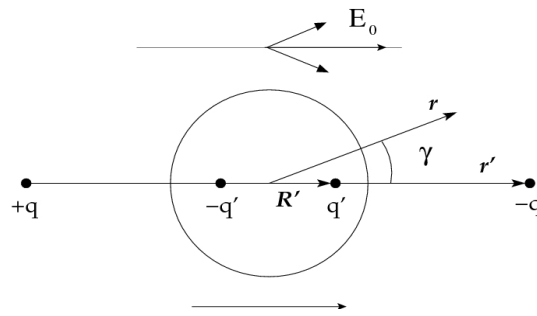


Figura 5.3: Esfera condutora em presença de um campo elétrico uniforme. Modelo construído usando-se cargas imagem pontuais.

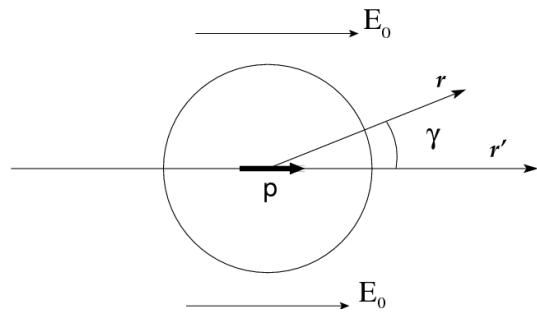


Figura 5.4: Esfera condutora na presença de um campo elétrico uniforme. Modelo construído usando-se um **dipolo imagem**

onde $\phi_{esfera}(\mathbf{r}_q)$ é o potencial constante na superfície da esfera, com a carga q em \mathbf{r}_q . Para determinar $\phi_{esfera}(\mathbf{r}_q)$, podemos escolher qualquer posição \mathbf{r} em (5.31). Por conveniência, escolhemos $r = a$, pois $G_D(|\mathbf{r}| = a, \mathbf{r}_q) = 0$, e obtemos

$$\phi(r = a) = \phi_{esfera}(\mathbf{r}_q) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q + q\frac{a}{r_q}}{a}. \quad (5.32)$$

Para obter o resultado acima utilizamos o princípio da superposição e o teorema do valor médio da eletrostática: *o potencial médio calculado sobre uma superfície esférica é igual ao potencial no centro da esfera*, lembrando que o potencial na esfera condutora deve ser constante. Enfim, substituindo (5.32) em (5.31) ficamos com

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}_q) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q + qa/r_q}{r}, \quad (5.33)$$

em acordo com (5.30). \Leftarrow

5.2.4 Esfera metálica na presença de campo elétrico uniforme: dipolo imagem

Consideremos o caso de uma esfera metálica na presença de um campo elétrico uniforme. Resolveremos esse problema típico de eletrostática pelo método das imagens. O problema pode ser descrito em termos de cargas imagens pontuais, como ilustra a Figura 5.3. Nesse caso, admite-se que o campo \mathbf{E}_0 na origem, onde se encontra a esfera condutora é produzido por

duas cargas pontuais $+q$ e $-q$, localizadas em $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$, respectivamente. A carga induzida total será nula, ou seja $q' + (-q') = 0$, por simetria.

No entanto, vamos utilizar outra forma de carga imagem: um **dipolo imagem**, como mostra a Figura 5.4, que também produz carga total induzida nula. O potencial de um dipolo puro é

$$\phi = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} . \quad (5.34)$$

O potencial resultante da superposição do campo externo uniforme e do campo produzido pelo dipolo imagem é

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \\ &= E_0 r \cos(\gamma) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos(\gamma)}{r^2} . \end{aligned} \quad (5.35)$$

Aplicando a condição de contorno $\phi(r = a) = 0$, encontramos o valor do momento de dipolo \mathbf{p} que satisfaz a equação geométrica

$$\phi(|\mathbf{r}| = a) = E_0 a \cos(\gamma) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos(\gamma)}{a^2} ,$$

que tem por solução $p = 4\pi\epsilon_0 a^3 E_0$.

Portanto, o potencial resultante em qualquer ponto fora da esfera condutora será

$$\phi(\mathbf{r}) = E_0 \cos\gamma \left(-r + \frac{a^3}{r^2} \right) . \quad (5.36)$$

A densidade de carga induzida é

$$\sigma = \epsilon_0 E_n = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial}{\partial r} \phi \right|_{r=a} = \frac{3}{4\pi} E_0 \cos\gamma$$

com $Q = \int_s \sigma a^2 \sin\gamma d\gamma d\varphi = 0$.

5.2.5 Cargas pontuais entre planos condutores oblíquos.

Considere o esquema ilustrado na Figura 5.5, que exemplifica o sistema físico em questão

Vamos usar o método das cargas imagem para determinar o potencial $\phi(\mathbf{r})$ entre os planos condutores.

Em linhas gerais, o método possui as seguintes características:

- o método pode ser usado apenas para $\psi = \frac{\pi}{n}$, com n inteiro,
- há $2n - 1$ cargas imagem, atrás dos planos condutores.
- todas as cargas imagem se localizam no mesmo plano sobre círculo $|\mathbf{r}| = \rho$, com $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$,
- as cargas imagem trocam de sinal consecutivamente,

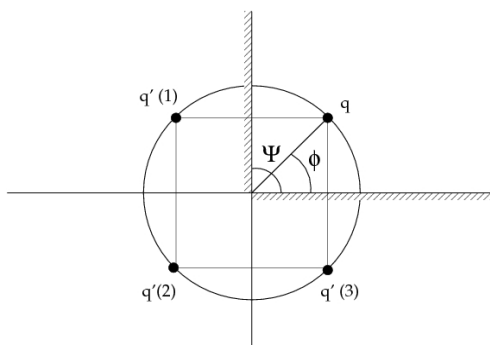


Figura 5.5: Carga real q entre planos condutores perpendiculares ($\Psi = \pi/4$). Três cargas imagem q_1 , q_2 e q_3 são utilizadas.

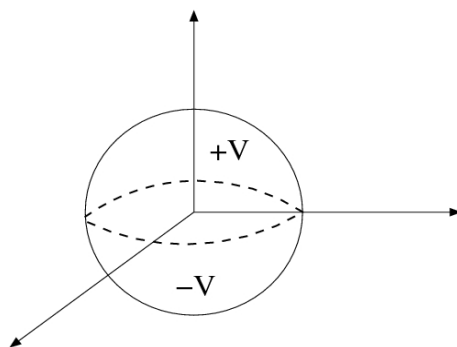


Figura 5.6: Dois hemisférios condutores mantidos em potenciais $+V$ e $-V$.

- a posição $\mathbf{r} = (\rho, \phi, z)$ da carga real q , entre os planos condutores, pode ser qualquer.

Para um caso geral, o potencia resultante é,

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=0}^{2n-1} \frac{q_i}{[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + z^2]^{1/2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=0}^{2n-1} \frac{q_i}{[(\rho \cos\varphi_i - x)^2 + (\rho \sin\varphi_i - y)^2 + z^2]^{1/2}}, \end{aligned} \quad (5.37)$$

com $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi$.

Esse método permite resolver facilmente e de maneira sistemática tais problemas de eletrostática que demandariam bastante esforço por métodos diferenciais.

5.3 Hemisférios circulares em potenciais $\pm V$: uma aplicação do método de Green

Vamos usar o método de Green para determinar o potencial produzido por dois hemisférios metálicos mantidos em potenciais $+V$ e $-V$, como ilustra a Figura 5.6. Sabemos que a função de Green para uma esfera condutora com condições de contorno de Dirichlet é

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{a/r'}{|\mathbf{r} - \frac{a^2}{r'} \hat{\mathbf{n}}'|}$$

com $\hat{\mathbf{n}}' = \mathbf{r}'/r'$, pois $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}' = 0) = 0$. Nesse exemplo não há densidade de carga $\rho(\mathbf{r}')$ fora dos hemisférios, mas ainda assim usamos a função de Green na forma de condições de contorno. Se o volume \mathcal{V} é o espaço fora da esfera e $\rho(\mathbf{r}') = 0$, temos para o potencial nessa região

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{-1}{4\pi} \oint_s \phi(a, \theta', \varphi') \frac{\partial}{\partial n'} G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') da' .$$

Também sabemos que

$$\frac{\partial G_D}{\partial n'} = -\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \nabla' G_D = \frac{-\partial}{\partial r'} G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = - \left(\frac{r^2 - a^2}{a} \right) \frac{1}{[r^2 + a^2 - 2ar \cos\gamma]^{3/2}} ,$$

para $r' = a$.

Portanto, a solução formal do problema é dada simplesmente por

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \phi(a, \theta', \varphi') \left(\frac{r^2 - a^2}{a} \right) \frac{a^2 d\Omega'}{[r^2 + a^2 - 2ar \cos\gamma]^{3/2}}$$

com

$$\phi(a, \theta', \varphi') = \begin{cases} +V & \text{para } 0 \leq \theta' < \frac{\pi}{2} \\ -V & \text{para } \frac{\pi}{2} < \theta' \leq \pi \end{cases} .$$

Mas $d\Omega' = \sin\theta' d\theta' d\varphi' = -d(\cos\theta') d\varphi'$, tal que

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} V \int_0^{2\pi} d\varphi' \left[\int_1^0 \frac{a(r^2 - a^2)}{[r^2 + a^2 - 2ar \cos\gamma]^{3/2}} [-d(\cos\theta')] - \int_0^{-1} \frac{a(r^2 - a^2)}{[r^2 + a^2 - 2ar \cos\gamma]^{3/2}} [-d(\cos\theta')] \right]$$

Fazendo as transformações de variáveis: $\theta' \Rightarrow \pi - \theta'$ e $\varphi' \Rightarrow \varphi' + \pi$, modificamos a segunda integral da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \cos\theta' &\rightarrow -\cos\theta' \\ \sin\theta' &\rightarrow \sin\theta' \\ \int_0^{-1} &\rightarrow \int_0^1 \\ \cos\gamma &= \cos\theta \cdot \cos\theta' + \sin\theta \cdot \sin\theta' \cdot \cos(\varphi - \varphi') \rightarrow -\cos\gamma , \end{aligned} \quad (5.38)$$

obtendo

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{V}{2} a(r^2 - a^2) \int_0^1 [(r^2 + a^2 - 2ar \cos\gamma)^{-3/2} - (r^2 + a^2 + 2ar \cos\gamma)^{-3/2}] d(\cos\theta') . \quad (5.39)$$

\Rightarrow Diferentes maneiras para se obter o potencial (5.39):

a) observador no eixo z (positivo) $\Rightarrow \mathbf{r} \parallel \hat{z}$. Nesse caso $\underline{\theta} = 0$ e $\cos\gamma = \cos\theta'$

$$\begin{aligned}\phi(z) &= \frac{V}{2}a(r^2 - a^2) \int_0^1 [(r^2 + a^2 - 2ar \cos\theta')^{-3/2} - (r^2 + a^2 + 2ar \cos\theta')^{-3/2}] d(\cos\theta') \\ &= V \left[1 - \frac{z^2 - a^2}{z(z^2 + a^2)^{1/2}} \right].\end{aligned}\quad (5.40)$$

Em $z = a$, temos $\phi(z = a) = V$.

b) expansão em “multipólos”. Fatorando o termo $(r^2 + a^2)$ dos radicais

$$[r^2 + a^2 - 2ar \cos\gamma]^{-3/2} = (r^2 + a^2)^{-3/2} \cdot [1 - 2\alpha \cos\gamma]^{-3/2},$$

com $\alpha = ar/(r^2 + a^2)$, podemos reescrever a integral do potencial (5.39) como

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{V}{4\pi} \frac{a(r^2 - a^2)}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 [(1 - 2\alpha \cos\gamma)^{-3/2} - (1 + 2\alpha \cos\gamma)^{-3/2}] d(\cos\theta')$$

Utilizando as expansões

$$(1 \pm x)^{-3/2} = 1 \pm \frac{3}{2}x + \frac{15}{8}x^2 \pm \frac{35}{16}x^3 \dots$$

$$(1 - x)^{-3/2} - (1 + x)^{-3/2} = 3x + \frac{35}{8}x^3 \dots$$

temos

$$(1 - 2\alpha \cos\gamma)^{-3/2} - (1 + 2\alpha \cos\gamma)^{-3/2} = 6\alpha \cos\gamma + 35\alpha^3 \cos^3\gamma + \dots$$

Note que somente os termos $(\alpha \cos\gamma)^n$, com n ímpar, contribuem para o potencial devido à simetria do problema. Usando a relação 5.38, calculamos

$$\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 d(\cos\theta') \cos\gamma = \pi \cos\theta \quad (5.41)$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 d(\cos\theta') \cos^3\gamma = \frac{\pi}{4} \cos\theta (3 - \cos^2\theta), \quad (5.42)$$

e obtemos para o potencial

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{3Va^2}{2r^2} \left[\frac{r^3(r^2 - a^2)}{(r^2 + a^2)^{5/2}} \right] \cos\theta \left[1 + \frac{35}{24} \frac{a^2 r^2}{(a^2 + r^2)^2} (3 - \cos^2\theta) + \dots \right],$$

onde somente as potências ímpares de $\cos\theta$ contribuem.

O parâmetro da expansão é $\frac{a^2 r^2}{(a^2 + r^2)}$. Para um observador distante dos hemisférios, $r \gg a$, o potencial é descrito por

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{3Va^2}{2r^2} \left[\cos\theta - \frac{7a^2}{15r^2} \left(\frac{5}{2} \cos^3\theta - \frac{3}{2} \cos\theta \right) + \dots \right]$$

que converge rapidamente. O primeiro termo corresponde a aproximação do dipolo.

Capítulo 6

Equação de Laplace: Separação de Variáveis

6.1 Coordenadas Cartesianas

Esse é um método utilizado para a solução de Equações Diferenciais Parciais (EDP). O problema de N variáveis pode ser separado em N equações diferenciais ordinárias, se não há termos que acoplem as coordenadas, e as equações diferenciais podem ser resolvidas independentemente pois uma transformação de variáveis desacopla as equações. Nesse tipo de problema é importante aproveitar a simetria natural do problema, para desacoplar as equações.

Para ilustrar o método vamos aplicá-lo inicialmente à resolução da Equação de Laplace, com condições de contorno de Dirichlet sobre uma superfície cartesiana. Temos a equação

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \phi(\mathbf{r}) = 0 \quad (6.1)$$

Supondo que é possível escrever o potencial como um produto de funções independentes, substituímos o potencial por $\phi(\mathbf{r}) = X(x)Y(y)Z(z)$ na equação (6.1) e obtemos

$$YZ \frac{\partial^2}{\partial x^2} X + XZ \frac{\partial^2}{\partial y^2} Y + XY \frac{\partial^2}{\partial z^2} Z = 0 .$$

Dividindo ambos os lados por $X(x)Y(y)Z(z)$,

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2}{\partial x^2} X + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2}{\partial y^2} Y + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2}{\partial z^2} Z = 0 . \quad (6.2)$$

Para que a equação (6.2) seja satisfeita para qualquer combinação das variáveis independentes $\{x, y, z\}$ cada um dos seguintes termos deve ser uma constante

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\alpha^2 \quad , \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\beta^2 \quad , \quad \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = +\gamma^2$$

tal que $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$. Note que as constantes α^2 , β^2 e γ^2 podem ser negativas ou positivas, pois $\{\alpha, \beta, \gamma\} \in \mathbb{C}$. Temos, portanto, o seguinte conjunto de equações harmônicas com suas

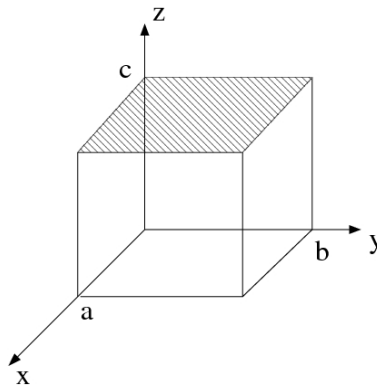


Figura 6.1: Caixa metálica com as faces mantidas em potencial nulo, com exceção da face $z = c$.

respectivas soluções

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \alpha^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = \{e^{i\alpha x}, e^{-i\alpha x}\} \equiv \{\cos(\alpha x), \sin(\alpha x)\} \quad (6.3)$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \beta^2 Y = 0 \Rightarrow Y(y) = \{e^{i\beta y}, e^{-i\beta y}\} \equiv \{\cos(\beta y), \sin(\beta y)\} \quad (6.4)$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - \gamma^2 Z = 0 \Rightarrow Z(z) = \{e^{\gamma z}, e^{-\gamma z}\} \quad (6.5)$$

com $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. As funções $Z(z)$ também podem ser escritas na forma

$$Z(z) = \{e^{(\alpha^2 + \beta^2)z}, e^{-(\alpha^2 + \beta^2)z}\} \equiv \left\{ \cosh \left[(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} z \right], \sinh \left[(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} z \right] \right\} .$$

Em sua forma mais geral, o potencial $\phi(\mathbf{r})$ é escrito como uma combinação linear das autofunções (6.3)–(6.5)

$$\phi(\mathbf{r}) = [A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x)] [C\cos(\beta y) + D\sin(\beta y)] [E\cosh(\gamma z) + F\sinh(\gamma z)] . \quad (6.6)$$

As amplitudes $\{A, B, C, D, E, F\}$ e os vetores de onda α e β devem ser determinados pelas equações de contorno do problema. Portanto, consideremos, por exemplo, o caso de uma caixa metálica de lados a, b e c , com $\phi = 0$ em todas as faces, exceto por $\phi(z = c) = V(x, y)$, como ilustra a Figura 6.1.

Das equações de contorno temos que

$$\phi(x = 0, y, z) = 0 \Rightarrow X(x) = B\sin(\alpha x)$$

$$\phi(x, y = 0, z) = 0 \Rightarrow Y(y) = D\sin(\beta y)$$

$$\phi(x, y, z = 0) = 0 \Rightarrow Z(z) = F\sinh \left[\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z \right]$$

e conseqüentemente

$$\phi(\mathbf{r}) \propto \text{sen}(\alpha x) \text{sen}(\beta y) \text{senh} \left[\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z \right]$$

Para $\phi(x = a, y, z) = 0$ e $\phi(x, y = b, z) = 0$ as equações de contorno resultantes são

$$\begin{aligned} \alpha a = m\pi &\implies \alpha = \frac{m\pi}{a}, \quad m \text{ inteiro} \\ \beta b = n\pi &\implies \beta = \frac{n\pi}{b}, \quad n \text{ inteiro} \end{aligned}$$

tal que

$$\phi_{mn}(\mathbf{r}) = A_{mn} \text{sen} \left[\frac{m\pi}{a} x \right] \text{sen} \left[\frac{n\pi}{b} y \right] \text{senh} \left[\pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} z \right]$$

é uma das infinitas soluções características que satisfaz essas condições de contorno do problema. Assim, a solução mais geral deve ser escrita como a soma de todas essas soluções

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{m,n} A_{mn} \text{sen} \left[\frac{m\pi}{a} x \right] \text{sen} \left[\frac{n\pi}{b} y \right] \text{senh} \left[\pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} z \right], \quad (6.7)$$

pois ∇^2 é um operador linear. Os coeficientes A_{mn} serão determinados pela última condição de contorno, $\phi(x, y, z = c) = V(x, y)$, tal que

$$\phi(x, y, c) = \sum_{m,n} A_{mn} \text{sen} \left[\frac{m\pi}{a} x \right] \text{sen} \left[\frac{n\pi}{b} y \right] \text{senh}(\gamma_{mn}c) = V(x, y) \quad (6.8)$$

Usamos a ortogonalidade das funções *sen* para determinar os coeficientes A_{mn}

$$\int_0^a \text{sen} \left[\frac{m\pi}{a} x \right] \text{sen} \left[\frac{m'\pi}{a} x \right] dx = \frac{a}{\pi} \underbrace{\int_0^\pi \text{sen}(m\lambda) \text{sen}(m'\lambda) d\lambda}_{\frac{\pi}{2} \delta_{m,m'}} = \begin{cases} \frac{a}{2}, & m = m' \\ 0, & m \neq m' \end{cases}.$$

Para isso fazemos

$$\begin{aligned} \sum_{mn} A_{mn} \iint \text{sen} \left[\frac{m\pi}{a} x \right] \text{sen} \left[\frac{m'\pi}{a} x \right] \text{sen} \left[\frac{n\pi}{b} y \right] \text{sen} \left[\frac{n'\pi}{b} y \right] \text{senh}(\gamma_{mn}c) \, dx dy \\ = \iint V(x, y) \text{sen} \left[\frac{m'\pi}{a} x \right] \text{sen} \left[\frac{n'\pi}{b} y \right] \, dx dy \\ \sum_{m,n} A_{mn} \frac{a}{2} \delta_{mm'} \frac{b}{2} \delta_{nn'} = \frac{1}{\text{senh}(\gamma_{mn}c)} \iint V(x, y) \text{sen} \left[\frac{m'\pi}{a} x \right] \text{sen} \left[\frac{n'\pi}{b} y \right] \, dx dy. \end{aligned}$$

e obtemos os coeficientes A_{mn} em termos do potencial $V(x, y)$ na superfície $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ e $z = c$,

$$A_{mn} = \frac{4}{ab \text{senh}(\gamma_{mn}c)} \int_0^a dx \int_0^b dy V(x, y) \text{sen} \left[\frac{m\pi}{a} x \right] \text{sen} \left[\frac{n\pi}{b} y \right]. \quad (6.9)$$

A expressão (6.7), escrita em termos dos coeficientes (6.9), descreve univocamente o potencial para as condições de contorno do nosso problema.

6.2 Coordenadas polares em 2D

A seguir exemplificamos o método da separação de variáveis para outro sistema. Considere a interseção entre dois planos condutores que formam um ângulo ψ entre si e são mantidos em um potencial constante V , ou seja, $\phi(\rho, 0) = \phi(\rho, \psi) = V$. Sendo o sistema invariante na direção da coordenada z , é conveniente usarmos as coordenadas polares bidimensionais $\mathbf{r} = (\rho, \theta)$. Nesse caso o Laplaceano torna-se

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \phi(\mathbf{r}) = 0$$

Escrevendo o potencial na forma do produto

$$\phi(\mathbf{r}) = R(\rho) \Theta(\theta) , \quad (6.10)$$

obtemos para a equação de Laplace

$$\frac{\rho}{R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) = -\frac{1}{\Theta} \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = \lambda^2 . \quad (6.11)$$

Inicialmente resolvemos a parte radial. Temos nesse caso

$$\rho^2 R'' + \rho R' - \lambda^2 R = 0 ,$$

que é conhecida como Equação de Euler (ou equidimensional). A equação é regular para $\rho > 0$, mas $\rho = 0$ é um ponto singular regular. Para essa família de equações é comum procurarmos uma solução na forma $R(\rho) = \rho^n$. Substituindo $R(\rho) = \rho^n$ na Equação de Euler, obtemos

$$\begin{aligned} \rho^2 n(n-1)\rho^{n-2} + \rho n\rho^{n-1} - \lambda^2 \rho^n &= 0 \\ n(n-1) + n - \lambda^2 &= 0 \quad \text{(equação indicial)} \\ n^2 = \lambda^2 &\implies \begin{cases} n_1 = \lambda \\ n_2 = -\lambda \end{cases} \end{aligned} \quad (6.12)$$

Para $\lambda \neq 0$, temos duas raízes distintas para a equação indicial, portanto a solução mais geral deve ser da forma

$$R_\lambda(\rho) = a_\lambda \rho^\lambda + b_\lambda \rho^{-\lambda} , \quad \text{para } \lambda \neq 0 \text{ e } \rho > 0 . \quad (6.13)$$

Podemos verificar que $R_1 = \rho^\lambda$ e $R_2 = \rho^{-\lambda}$ são linearmente independentes (LI) calculando o Wronskiano

$$W(\rho^\lambda, \rho^{-\lambda}) = \begin{vmatrix} \rho^\lambda & \rho^{-\lambda} \\ \lambda \rho^{\lambda-1} & -\lambda \rho^{-(\lambda+1)} \end{vmatrix} = \rho^\lambda \frac{(-\lambda)}{\rho^{\lambda+1}} - \lambda \frac{\rho^{\lambda-1}}{\rho^{\lambda+1}} = \frac{-2\lambda}{\rho} ,$$

de onde verificamos que $W(\rho^\lambda, \rho^{-\lambda}) \neq 0$ para todo ρ .

Quando $\lambda = 0$ temos $n_1 = n_2 = 0$ em (6.12), portanto uma das soluções é $R(\rho) = \text{constante}$. A outra solução é obtida por integração direta da equação diferencial

$$\begin{aligned} \rho^2 R'' + \rho R' - \lambda^2 R &= 0 & , \quad \rho > 0 \\ \rho^2 R'' + \rho R' &= 0 \\ \rho R'' + R' &= 0 . \end{aligned} \quad (6.14)$$

Fazendo $R' = u$ em (6.14), obtemos a equação diferencial de 1ª ordem $\rho u' = -u$, que ao ser integrada resulta em

$$\ln\left(\frac{u}{u_0}\right) = -\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) \quad \Longrightarrow \quad u = \frac{u_0 \rho_0}{\rho} \quad \Longrightarrow \quad R' = \frac{c_0}{\rho} .$$

Integrando R'

$$R' = \frac{c_0}{\rho} \quad \Longrightarrow \quad dR = c_0 \frac{d\rho}{\rho} \quad \Longrightarrow \quad R(\rho) = c_0 \int \frac{d\rho}{\rho}$$

Por fim, temos duas soluções independentes : $R_1(\rho) = \text{const}$ e $R_2(\rho) = \ln \rho$, tal que

$$R_0(\rho) = a_0 + b_0 \ln \rho \quad \text{para} \quad \lambda = 0 \quad \text{e} \quad \rho > 0 . \quad (6.15)$$

O Wronskiano $W(\alpha, \ln \rho) = \frac{\alpha}{\rho} \neq 0$, com α constante, nos garante a independência entre R_1 e R_2 .

Para a parte angular temos da equação de separação (6.11), quando $\lambda \neq 0$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \lambda^2\Theta = 0, \quad \text{com} \quad \Theta_\lambda = A_\lambda \cos(\lambda\theta) + B_\lambda \sen(\lambda\theta) . \quad (6.16)$$

Quando $\lambda = 0$

$$\frac{d\Theta}{d\theta} = \text{constante}, \quad \text{com} \quad \Theta_0 = A_0 + B_0\theta . \quad (6.17)$$

Combinando as soluções das equações em cada variável no produto (6.10), ficamos com

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} R_\lambda(\rho)\Theta_\lambda(\theta) \\ &= (a_0 + b_0 \ln \rho) (A_0 + B_0\theta) + \sum_{\lambda=1}^{\infty} (a_\lambda \rho^\lambda + b_\lambda \rho^{-\lambda}) [A_\lambda \cos(\lambda\theta) + B_\lambda \sen(\lambda\theta)] . \end{aligned} \quad (6.18)$$

As constantes a_λ , b_λ , A_λ e B_λ são, em princípio, arbitrárias e devem ser determinadas pelas condições de contorno do problema

$$\phi(\rho, 0) = \phi(\rho, \psi) = V \quad \text{para todo} \quad \rho > 0 .$$

Aplicando as condições de contorno, obtemos:

- $B_0 = 0$, pois o potencial deve ser oscilante na variável θ , ou seja $\phi(\rho, \theta = 0) = \phi(\rho, \theta = \psi) = V$;
- $b_0 = 0$ e $b_\lambda = 0$, para qualquer λ , pois o potencial deve ser finito na origem;

Até então temos a solução

$$\phi(\mathbf{r}) = (a_0 A_0) + \sum_{\lambda \neq 0} a_\lambda \rho^\lambda [A_\lambda \cos(\lambda\theta) + B_\lambda \sen(\lambda\theta)]$$

Na ausência de plano condutores, teríamos condições periódicas de contorno e a unicidade da solução implicaria em

$$e^{i\lambda\theta} = e^{i\lambda(\theta+2\pi)} = e^{i\lambda\theta} \cdot e^{i\lambda 2\pi} \Rightarrow e^{i2\pi\lambda} = 1 \Rightarrow 2\pi\lambda = 2\pi n \Rightarrow \lambda = n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Em razão da presença dos planos condutores as condições de contorno tornam-se outras. Temos em $\theta = 0$

$$\phi(\rho, 0) = (a_0 A_0) + \sum_{\lambda \neq 0} a_\lambda \rho^\lambda [A_\lambda + 0] = V ,$$

portanto fazemos $A_\lambda = 0$, para $\lambda \neq 0$, e $(a_0 A_0) = V$. Ficamos com $(a_\lambda B_\lambda \rightarrow a_\lambda)$

$$\phi(\rho, \theta) = V + \sum_{\lambda \neq 0} a_\lambda \rho^\lambda \text{sen}(\lambda\theta) .$$

Em $\theta = \psi$, temos a equação

$$\phi(\rho, \psi) = V + \sum_{\lambda \neq 0} a_\lambda \rho^\lambda \text{sen}(\lambda\psi) = V ,$$

portanto

$$\lambda\psi = m\pi \Rightarrow \lambda = m \frac{\pi}{\psi} , \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Finalmente, ficamos com

$$\phi(\mathbf{r}) = V + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \rho^{m \frac{\pi}{\psi}} \text{sen} \left(m \frac{\pi}{\psi} \theta \right) . \quad (6.19)$$

O segundo termo de (6.19) vai para zero quando $\rho \rightarrow 0$, pois $\phi(\mathbf{r} = 0) = V$.

—> Exercício: Determine os coeficientes a_m em (6.19).

==> Cavidades e Pontas

Analisamos o que ocorre com o potencial na região $0 < \rho \ll 1$. Nesse caso podemos fazer a aproximação

$$\phi(\rho, \theta) = V + a_1 \rho^{\frac{\pi}{\psi}} \text{sin} \left(\frac{\pi}{\psi} \theta \right) .$$

O campo elétrico será dado por $\mathbf{E}(\rho, \theta) = -\nabla\phi$, com $\nabla = \hat{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{e}_\theta \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta}$, tal que

$$\mathbf{E}(\rho, \theta) = -\frac{\pi a_1}{\psi} \rho^{(\frac{\pi}{\psi}-1)} \left[\text{sin} \left(\frac{\pi}{\psi} \theta \right) \hat{e}_\rho + \text{cos} \left(\frac{\pi}{\psi} \theta \right) \hat{e}_\theta \right] .$$

Note que para $\theta = 0$ e para $\theta = \psi$ temos $\mathbf{E} = |\mathbf{E}|\hat{e}_\theta$, perpendicular aos planos condutores.

A densidade de carga nos planos condutores é

$$\sigma(\rho) = \varepsilon_0 E_n(\rho) \Big|_{\theta=0, \psi}$$

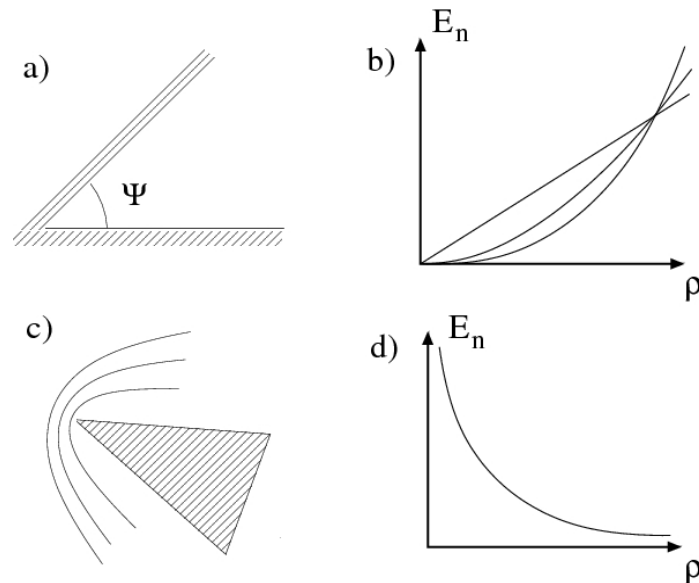


Figura 6.2: a) Cavidade formada por planos condutores. b) Esboço de como os campos \mathbf{E} se anulam no centro da cavidade. c) Ponta condutora com linhas equipotenciais. d) Esboço de como o campo \mathbf{E} diverge na ponta.

com

$$E_n(\rho) = \pm \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \phi(\mathbf{r}) = \pm \frac{\pi a_1}{\psi} \rho^{(\pi/\psi-1)} \cos\left(\frac{\pi}{\psi}\theta\right).$$

Portanto

$$\sigma(\rho) = \frac{\epsilon_0 \pi a_1}{\psi} \rho^{(\pi/\psi-1)} \quad \text{para } \theta = 0 \text{ e } \psi, \text{ respectivamente.}$$

Consideremos os seguintes casos particulares:

1. Cavidades: figuras 6.2a) e 6.2b)

- a) $\psi = \pi/2 \Rightarrow E_n, \sigma \propto \rho^1$
- b) $\psi = \pi/3 \Rightarrow E_n, \sigma \propto \rho^2$
- c) $\psi = \pi/4 \Rightarrow E_n, \sigma \propto \rho^3$

2. Plano Condutor:

$$\psi = \pi \Rightarrow E_n, \sigma \propto \rho^0 = \text{const.}$$

3. Pontas: figuras 6.2c) e 6.2d)

- a) $\psi = 3\pi/2 \Rightarrow E_n, \sigma \propto \rho^{-\frac{1}{3}}$
- b) $\psi = 2\pi \Rightarrow E_n, \sigma \propto \rho^{-\frac{1}{2}}$

6.3 Soluções da Equação Diferencial de Laplace em 3D

- Coordenadas Cartesianas Retangulares (x, y, z) :

$$\nabla^2 \phi \equiv \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (6.20)$$

admite soluções do tipo

$$\phi_{k_1 k_2 k_3}(x, y, z) = e^{(k_1 x + k_2 y + k_3 z)} \quad (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 0) \quad (6.21)$$

$$\phi_{000}(x, y, z) = (a + bx)(\alpha + \beta y)(A + Bz) \quad (6.22)$$

• **Coordenadas Cilíndricas** (ρ, φ, z) :

Seja $\phi = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$, então

$$\nabla^2 \phi \equiv \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (6.23)$$

separa em três equações

$$R'' + \frac{1}{\rho} R' - \left(K^2 + \frac{m^2}{\rho^2} \right) R = 0 \quad (6.24)$$

$$\Phi'' + m^2 \Phi = 0 \quad (6.25)$$

$$Z'' + K^2 Z = 0 \quad (6.26)$$

sendo que a condição de unicidade $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ implica em $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ e K é uma constante de separação que deve ser determinada pelas condições de contorno do problema. O conjunto de soluções para a Eq. (6.23) é formado por

$$\phi_{\pm K m}(\rho, \varphi, z) = e^{\pm i K z} \mathcal{B}_m(K\rho) [\alpha \cos(m\varphi) + \beta \text{sen}(m\varphi)] \quad (6.27)$$

$$\phi_{\pm K 0}(\rho, \varphi, z) = e^{\pm i K z} \mathcal{B}_m(K\rho) (\alpha + \beta \varphi) \quad (6.28)$$

$$\phi_{0 m}(\rho, \varphi, z) = (a + bz) \left(A\rho + \frac{B}{\rho} \right) [\alpha \cos(m\varphi) + \beta \text{sen}(m\varphi)] \quad (6.29)$$

$$\phi_{00}(\rho, \varphi, z) = (a + bz) (A + B \ln \rho) (\alpha + \beta \varphi) \quad (6.30)$$

onde $m = 0, 1, 2, \dots$ e $\mathcal{B}(K\rho)$ é uma função radial da família das funções de Bessel e K é um número de onda que pode ser real ou imaginário.

• **Coordenadas Esféricas** (r, θ, φ) :

Seja $\phi = R(r)P(\cos\theta)\Phi(\varphi)$, então

$$r^2 \nabla^2 \phi \equiv \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\text{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\text{sen}\theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\text{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (6.31)$$

pode ser separada em três equações

$$R'' + \frac{2}{r} R' - \frac{j(j+1)}{r^2} R = 0 \quad (6.32)$$

$$(1 - x^2) P'' - 2x P' + \left[j(j+1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right] P = 0 \quad (6.33)$$

$$\Phi'' + m^2 \Phi = 0 \quad (6.34)$$

onde $x = \cos\theta$. Para que $P(\cos\theta)$ seja regular nos pólos $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ devemos ter $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ e para que Φ seja unívoca fazemos $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm j$.

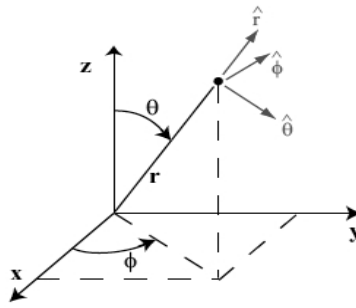


Figura 6.3: Eixos do sistema de coordenadas esféricas

A equação (6.31) admite soluções na forma

$$\phi_{jm}(r, \theta, \phi) = \left(Ar^j + \frac{B}{r^{j+1}} \right) P_j^m(\cos\theta) [\alpha \cos(m\varphi) + \beta \sin(m\varphi)] \quad (6.35)$$

com $j = 0, 1, 2, \dots$ e $m = 0, 1, 2, \dots, j$. $P_j^m(\cos\theta)$ são as funções associadas de Legendre de primeiro tipo e grau j . Podemos combinar as soluções da parte angular para reescrever (6.35) na forma

$$\phi_{jm}(r, \theta, \phi) = \left(Ar^j + \frac{B}{r^{j+1}} \right) Y_j^m(\theta, \varphi) . \quad (6.36)$$

As funções $Y_j^m(\theta, \varphi)$, denominadas harmônicos esféricos, satisfazem a equação(6.31) para r constante e podem ser escritas como

$$Y_j^m(\theta, \varphi) = P_j^m(\cos\theta) [\alpha_m \cos(m\varphi) + \beta_m \sin(m\varphi)] , \quad (6.37)$$

para $m = 0, 1, \dots, j$ ou ainda

$$Y_j^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi} \frac{(j-m)!}{(j+m)!}} P_j^m(\cos\theta) e^{im\varphi} , \quad (6.38)$$

para $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm j$ e $j = 0, 1, 2, \dots$.

6.4 Problema de Sturm-Liouville

O problema de Sturm-Liouville descreve de maneira geral uma classe importante de problemas em física, que são os problemas de condições de contorno em sistemas de equações diferenciais. Por exemplo, são casos particulares dessa classe de problemas:

- Problemas em Eletromagnetismo, Termodinâmica, Mecânica Quântica, Mecânica Clássica entre outros;
- Teoria de operadores lineares, as funções especiais e o problema de auto-valores;
- As expansões em séries de polinômios (Bessel, Legendre, Hermite, etc) e séries de Fourier;
- EDP com condições de contorno, de maneira geral; etc...

Em seguida fazemos uma descrição resumida das propriedades dessa classe tão importante de problemas.

O problema de Sturm-Liouville é definido pela Equação Diferencial

$$[p(x) y']' - q(x) y + \lambda r(x) y = 0 \quad (6.39)$$

com $y(x)$ definida no intervalo $a \leq x \leq b$, juntamente com as condições de contorno

$$a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0 \quad , \quad b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0 \quad (6.40)$$

nos pontos extremos. Adiante veremos que as condições de contorno são tão importantes quanto a própria equação diferencial, pois juntamente com a Eq. (6.39) determinam as soluções características do problema. Um intervalo arbitrário $a \leq x \leq b$ pode ser considerado, com a e b finitos ou infinitos, dependendo de $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$. Além disso, impomos as seguintes condições: $p(x) > 0$ e $r(x) > 0$, no intervalo $a \leq x \leq b$.

Exemplos de Equações de Sturm-Liouville são:

Equação Harmônica: $p(x) = 1$, $q(x) = 0$, $r(x) = 1$

$$y'' + \lambda y = 0 \quad \text{com soluções} \quad \exp(\pm i\sqrt{\lambda}x)$$

no intervalo $-\infty \leq x \leq \infty$.

Equação de Bessel: $p(x) = x$, $q(x) = \nu^2/x$, $r(x) = x$

$$[xy']' - \frac{\nu^2}{x}y + \lambda xy = 0 \Rightarrow y'' + \frac{1}{x}y' + \left[\lambda - \frac{\nu^2}{x^2}\right]y = 0$$

no intervalo $x > 0$.

Equação ordinária de Legendre: $p(x) = 1 - x^2$, $q(x) = 0$, $r(x) = 1$

$$[(1 - x^2)y']' + j(j + 1)y = 0 \Rightarrow (1 - x^2)y'' - 2xy' + j(j + 1)y = 0$$

no intervalo $-1 \leq x \leq 1$.

Equação de Hermite: $p(x) = \exp(-x^2)$, $q(x) = 0$, $r(x) = \exp(-x^2)$

$$[e^{-x^2}y']' + 2ne^{-x^2}y = 0 \Rightarrow y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

no intervalo $-\infty \leq x \leq \infty$. (Eq. do oscilador harmônico quântico)

Equação de Laguerre: $p(x) = x\exp(-x)$, $q(x) = 0$, $r(x) = \exp(-x)$

$$[xe^{-x}y']' + ne^{-x}y = 0 \Rightarrow xy'' + (1 - x)y' + ny = 0$$

no intervalo $x > 0$. (Eq. radial do átomo de hidrogênio)

A seguir derivamos as propriedades mais importantes do sistema de Sturm-Liouville, as quais nos serão úteis para a solução de uma grande variedade de problemas de eletrostática. Primeramente, definimos o **operador linear diferencial de Sturm-Liouville** \mathcal{L} ,

$$\mathcal{L}[y] = - [p(x) y']' + q(x) y ,$$

tal que a equação diferencial de Sturm-Liouville (6.39) torna-se

$$\mathcal{L}[y] = \lambda r(x)y.$$

Sejam as funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluções da equação de SL no intervalo $[a, b]$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y_1] &= \lambda_1 r(x)y_1 \\ \mathcal{L}[y_2] &= \lambda_2 r(x)y_2 . \end{aligned}$$

Utilizando o método de integração por partes vamos demonstrar na sequência a Identidade de Lagrange para o operador \mathcal{L}

$$\int_a^b \{ \mathcal{L}[y_1]y_2 - y_1\mathcal{L}[y_2] \} dx = -p [y_1'y_2 - y_1y_2'] \Big|_a^b . \quad (6.41)$$

\implies Identidade de Lagrange para o operador \mathcal{L} :

Considere as funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$, com derivadas segundas bem definidas. Para essas funções características escrevemos

$$\int_a^b \mathcal{L}[y_1]y_2 dx = \int_a^b \{ -(py_1')'y_2 + qy_1y_2 \} dx . \quad (6.42)$$

O primeiro termo no lado direito da equação é integrado por partes

$$\int_a^b \left[- \underbrace{(p y_1')}'_{f'} \underbrace{y_2}_g \right] dx = -p y_1' y_2 \Big|_a^b - \underbrace{\int_a^b [-p y_1' y_2'] dx}_{\alpha} \quad (6.43)$$

com

$$\int_a^b p y_1' y_2 dx = \int_a^b p y_2' y_1 dx . \quad (6.44)$$

Também temos o resultado

$$\int_a^b \underbrace{p y_2'}_f \underbrace{y_1'}_{g'} dx = p y_2' y_1 \Big|_a^b - \int_a^b [p y_2']' y_1 dx , \quad (6.45)$$

que pode substituir o termo α na Eq. (6.43), resultando em

$$\int_a^b [-(p y_1')'y_2] dx = -p y_1' y_2 \Big|_a^b + p y_1 y_2' \Big|_a^b + \int_a^b [(-p y_2')'y_1] dx . \quad (6.46)$$

Então, reescrevemos (6.42) na forma

$$\begin{aligned} \int_a^b \mathcal{L}[y_1]y_2 \, dx &= -p[y_1'y_2 - y_1y_2'] \Big|_a^b + \int_a^b [-(py_2')y_1 + qy_2y_1] \, dx \\ &= -p[y_1'y_2 - y_1y_2'] \Big|_a^b + \int_a^b \mathcal{L}[y_2]y_1 \, dx, \end{aligned} \quad (6.47)$$

que nos leva a

$$\int_a^b \{\mathcal{L}[y_1]y_2 - y_1\mathcal{L}[y_2]\} \, dx = -p[y_1'y_2 - y_1y_2'] \Big|_a^b. \quad \Leftarrow \quad (6.48)$$

Antes de derivar as várias propriedades que decorrem da Eq. (6.48), vamos considerar algumas das formas que as condições de contorno de SL podem assumir

Direchlet: $y(a) = y(b) = 0$

Neumann: $y'(a) = y'(b) = 0$

Cauchy: $y(a) = y(b), \quad y'(a) = y'(b)$

caso geral: $a_1y(a) + a_2y'(a) = 0, \quad b_1y(b) + b_2y'(b) = 0$

Derivamos, então, as seguintes propriedades.

P1)- Se y_1 e y_2 satisfazem as condições de contorno de SL

$$[p(x)(y_1y_2' - y_1'y_2)] \Big|_a^b = 0 \quad (6.49)$$

nos pontos extremos a e b , então a Eq. (6.48) torna-se

$$\int_a^b \{\mathcal{L}[y_1]y_2 - y_1\mathcal{L}[y_2]\} \, dx = 0. \quad (6.50)$$

Usando a notação de produto escalar

$$(\mathcal{L}[y_1], y_2) - (y_1, \mathcal{L}[y_2]) = 0 \implies (\mathcal{L}[y_1], y_2) = (y_1, \mathcal{L}[y_2]). \quad (6.51)$$

Portanto o operador de Sturm-Liouville \mathcal{L} é **auto-adjunto**.

P2)- Se \mathcal{L} é auto-adjunto seus autovalores são reais:

Sejam

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \mu + i\nu = \text{constante} \\ y(x) &= U(x) + iV(x) \end{aligned} \right\} \quad \text{com } \mu, \nu, U(x), V(x) \in \mathbb{R}.$$

Se $y(x)$ satisfaz as condições de contorno, temos

$$(\mathcal{L}[y], y) = (y, \mathcal{L}[y]) \implies (\lambda r y, y) = (y, \lambda r y)$$

com $r(x) \in \mathbb{R}$. Usando a notação integral para o produto escalar

$$\int_a^b \lambda^* r y^*(x) y(x) dx = \int_a^b y^*(x) \lambda r y(x) dx$$

$$(\lambda^* - \lambda) \int_a^b r(x) y^*(x) y(x) dx = 0$$

$$(\lambda^* - \lambda) \int_a^b r(x) [U^2(x) + V^2(x)] dx = 0 . \tag{6.52}$$

Para que a Eq. (6.52) seja satisfeita devemos ter $\lambda^* = \lambda$, pois $U^2(x) + V^2(x) \neq 0$. Mas $\lambda^* - \lambda = -2i\nu = 0 \rightarrow \nu = 0$. Portanto o autovalor λ deve ser real se \mathcal{L} é auto-adjunto.

Essa é uma propriedade importante para a Mecânica Quântica, pois implica em que os operadores que representam grandezas observáveis devem ser auto-adjuntos (ou Hermitianos se \mathcal{L} for complexo).

P3)- Funções características (autofunções) ortogonais se \mathcal{L} é auto-adjunto:

Considere os pares de autofunções e autovalores do operador \mathcal{L}

$$y_m(x) \longleftrightarrow \lambda_m \quad \text{e} \quad y_n(x) \longleftrightarrow \lambda_n ,$$

os quais satisfazem as equações de SL

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y_m] &= \lambda_m r y_m \\ \mathcal{L}[y_n] &= \lambda_n r y_n . \end{aligned}$$

Se \mathcal{L} é um operador auto-adjunto, então

$$(\mathcal{L}[y_m], y_n) = (y_m, \mathcal{L}[y_n]) \tag{6.53}$$

$$(\lambda_m r y_m, y_n) = (y_m, \lambda_n r y_n) , \tag{6.54}$$

com λ_m e λ_n reais.

Por simplicidade, assumimos que os autovalores não são degenerados, ou seja, $\lambda_m \neq \lambda_n$ para $m \neq n$. Então, desenvolvemos a equação (6.54) para obter

$$\begin{aligned} (\lambda_m r y_m, y_n) - (y_m, \lambda_n r y_n) &= 0 \\ \int_a^b \lambda_m r(x) y_m^*(x) y_n(x) dx - \int_a^b \lambda_n r(x) y_m^*(x) y_n(x) dx &= 0 \\ (\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b r(x) y_m^*(x) y_n(x) dx &= 0 \end{aligned} \tag{6.55}$$

Dois casos podem ocorrer:
para $m \neq n$ e $\lambda_m \neq \lambda_n$ temos

$$\int_a^b r(x) y_m^*(x) y_n(x) dx = 0 , \quad (6.56)$$

portanto $y_m(x)$ e $y_n(x)$ são ortogonais em relação ao peso $r(x)$.
Para $m = n$ e $\lambda_m - \lambda_n = 0$ temos

$$\int_a^b r(x) |y_m(x)|^2 dx = N_m , \quad (6.57)$$

onde N_m é a norma da função em relação ao peso $r(x)$.

Unificando os resultados (6.56) e (6.57) numa mesma equação, a propriedade P3 é representada pela expressão

$$\int_a^b r(x) y_m^*(x) y_n(x) dx = N_m \delta_{m,n} . \quad (6.58)$$

Se $N_m = 1$ para todo m as autofunções y_m são denominadas ortonormais.

Tratamos a seguir da expansão de funções arbitrárias $f(x)$ em termos das funções características de SL, no intervalo $[a, b]$. Uma solução arbitrária do problema de Sturm-Liouville pode ser representado pela série infinita

$$f(x) = \sum_n a_n y_n(x) , \quad (6.59)$$

com as constantes a_n a serem determinadas pelas condições de contorno nos pontos $x = a$ e $x = b$. Para determinar a_n fazemos

$$\begin{aligned} r y_m^* f &= \sum_n a_n r y_m^* y_n \\ \int_a^b r(x) y_m^*(x) f(x) dx &= \sum_n a_n \underbrace{\int_a^b r(x) y_m^*(x) y_n(x) dx}_{N_m \delta_{m,n}} \end{aligned}$$

Portanto

$$a_m = \frac{1}{N_m} \int_a^b r(x) y_m^*(x) f(x) dx , \quad (6.60)$$

com

$$N_m = \int_a^b r(x) |y_m(x)|^2 dx \quad (6.61)$$

para todo $m = 1, 2, \dots$.

6.5 Completeza

O conjunto de funções $\{y_m(x)\}$ é considerado completo se descreve rigorosamente qualquer função $f(x)$ no intervalo $[a, b]$, ou seja, se a igualdade (6.59) é satisfeita rigorosamente e a série é convergente. Nesse caso, utilizamos (6.60) para obter

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_n a_n y_n(x) \\
 &= \sum_n \left[\frac{1}{N_n} \int_a^b r(x') y_n^*(x') f(x') dx' \right] y_n(x) \\
 &= \int_a^b \left[\frac{r(x')}{N_n} \sum y_n^*(x') y_n(x) \right] f(x') dx' \\
 &= \int_a^b \delta(x' - x) f(x') dx' .
 \end{aligned} \tag{6.62}$$

Portanto, para um conjunto completo temos

$$r(x') \sum_n \frac{y_n^*(x') y_n(x)}{N_n} = \delta(x' - x) . \tag{6.63}$$

6.6 Unicidade das séries de Funções Características

1º caso) Duas funções f e g expressas pela mesma série devem ser iguais.

Considere o conjunto completo de funções características $\{y_i\}$

$$\left. \begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{i=1}^n c_i y_i = \sum_{i=1}^n (y_i, f) y_i \\
 g(x) &= \sum_{i=1}^n d_i y_i = \sum_{i=1}^n (y_i, g) y_i
 \end{aligned} \right\} c_i = (y_i, f) = (y_i, g) \longrightarrow (y_i, f) - (y_i, g) = (y_i, f - g) = 0$$

para qualquer i . Mas se $\{y_i\}$ é um conjunto completo, devemos ter $f - g = 0$, e, portanto, $f(x) = g(x)$.

2º caso) Os coeficientes da expansão de uma função $f(x)$ são únicos,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{i=1}^n c_i y_i \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{i=1}^n d_i y_i \right\| = 0 \Rightarrow c_i = d_i$$

ou seja, a função $f(x)$ é expressa por uma única série na base de funções $\{y_i\}$. Na expressão acima utilizamos a notação

$$\|f\| \equiv (f(x), f(x)) \equiv \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

para representar a norma da função $f(x)$.

Consideremos a desigualdade triangular ¹ no espaço de funções

$$\begin{aligned} \left\| \sum_i^n c_i y_i - \sum_i^n d_i y_i \right\| &= \left\| \sum_i^n c_i y_i - f + f - \sum_i^n d_i y_i \right\| \leq \\ &\leq \left\| \sum_i^n c_i y_i - f \right\| + \left\| f - \sum_i^n d_i y_i \right\| = \left\| f - \sum_i^n c_i y_i \right\| + \left\| f - \sum_i^n d_i y_i \right\| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

pois, se $\{y_i\}$ é completo, podemos encontrar n grande o suficiente tal que

$$\left\| f - \sum_i^n c_i y_i \right\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \left\| f - \sum_i^n d_i y_i \right\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

com ε tão pequeno quanto se queira, porque ambas as séries são convergentes. Portanto

$$\int_a^b \left| \sum_i^n c_i y_i - \sum_i^n d_i y_i \right|^2 dx = \int_a^b \left| \sum_i^n (c_i - d_i) y_i \right|^2 dx = \sum_{ij} (c_i - d_i)(c_j - d_j) \int_a^b y_i y_j dx = \sum_i^n (c_i - d_i)^2 < \varepsilon.$$

Porém a igualdade acima só pode ser verdadeira se $c_i - d_i = 0$ e $c_i = d_i$. Portanto $c_i = d_i = (y_i, f)$ e os coeficientes da série são únicos. Fisicamente, podemos dizer que os coeficientes usados para representar o potencial não dependem da posição do observador.

3º caso) Os coeficientes c_i da série

$$f(x) = \sum_{i=1}^n c_i y_i$$

não dependem de n, ou seja, não dependem de quando a série é truncada.

¹Um exemplo geométrico simples da desigualdade triangular é $|\vec{v} + \vec{u}| = [v^2 + u^2 + 2|\vec{v}||\vec{u}|\cos(\widehat{\vec{v}, \vec{u}})]^{1/2} \leq [|\vec{v}|^2 + |\vec{u}|^2]^{1/2}$.

Capítulo 7

Expansão da Função de Green

7.1 Coordenadas Esféricas

Em coordenadas esféricas (r, θ, φ) (Figura 6.3) escrevemos

$$\nabla^2 \phi \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r\phi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \text{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\text{sen}\theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\text{sen}^2\theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (7.1)$$

Nesse caso é conveniente escrever o potencial ϕ na forma do produto de funções

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi(r, \theta, \varphi) = \frac{U(r)}{r} P(\theta) Q(\varphi), \quad (7.2)$$

ainda mais se as condições de contorno podem ser representadas por planos no sistema de coordenadas esféricas. Introduzindo (7.2) em (7.1) e multiplicando a equação resultante por $r^3 \text{sen}^2\theta / UPQ$, obtemos

$$r^2 \text{sen}^2\theta \left\{ \frac{1}{U} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \text{sen}\theta} \frac{1}{P} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\text{sen}\theta \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \right\} + \frac{1}{Q} \frac{\partial^2 Q}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Sendo as variáveis r , θ e φ independentes, devemos ter

$$\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = -m^2 = (-1)r^2 \text{sen}^2\theta \left[\frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r^2 \text{sen}\theta} \frac{1}{P} \frac{d}{d\theta} \left(\text{sen}\theta \frac{dP}{d\theta} \right) \right],$$

onde m é uma das constantes de separação. Para a parte azitumal ficamos com a equação

$$Q'' + m^2 Q = 0 \quad \Rightarrow \quad Q(\varphi) = e^{\pm im\varphi},$$

com m inteiro, por imposição da condição de unicidade para $Q(\varphi)$

$$\begin{aligned} e^{im\varphi} &= e^{im(\varphi+2\pi)} \\ e^{im2\pi} &= 1 \quad \Rightarrow \quad m = 0, \pm 1, \pm 2. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Resta ainda a equação

$$\frac{m^2}{\text{sen}^2\theta} = \frac{r^2}{U} U'' + \frac{1}{\text{sen}\theta} \frac{1}{P} [\text{sen}\theta P']',$$

que pode ser separada por meio de uma constante $l(l+1)$,¹

$$\frac{r^2}{U} U'' = \frac{-1}{\text{sen}\theta} \frac{1}{P} [\text{sen}\theta P']' + \frac{m^2}{\text{sen}^2\theta} = l(l+1),$$

produzindo as equações

$$U'' - l(l+1) \frac{U}{r^2} = 0 \tag{7.4}$$

$$\frac{1}{\text{sen}\theta} [\text{sen}\theta P']' + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\text{sen}^2\theta} \right] P = 0, \tag{7.5}$$

denominadas Equação de Euler e Equação generalizada de Legendre, respectivamente. Todas as equações acima são Equações de Sturm-Liouville, com as devidas propriedades.

A equação (7.4) admite soluções do tipo $U(r) = r^\alpha$, com $\alpha_1 = l+1$ e $\alpha_2 = -l$, tal que

$$\left. \begin{aligned} U(r) &= Ar^{\alpha_1} + Br^{\alpha_2} = Ar^{l+1} + Br^{-l} \\ \frac{U(r)}{r} &= Ar^l + \frac{B}{r^{l+1}} \end{aligned} \right\} \text{ com A e B arbitrários.}$$

Inicialmente consideramos o caso particular $m = 0$ na Equação de Legendre. Isto corresponde a um problema com simetria azimutal, pois o potencial $\phi(\mathbf{r}) = \phi(r, \theta)$ passa a ser independente de φ . Ficamos, portanto, com a equação

$$\frac{1}{\text{sen}\theta} \frac{d}{d\theta} \left[\text{sen}\theta \frac{dP}{d\theta} \right] + l(l+1)P = 0.$$

Fazendo a mudança de variável $x = \cos\theta$, com $dx = -\text{sen}\theta d\theta \Rightarrow d\theta = -dx/\text{sen}\theta$, reescrevemos

$$\frac{1}{\text{sen}\theta} \frac{d}{d\theta} \left[\text{sen}\theta \frac{dP}{d\theta} \right] = \frac{1}{\text{sen}\theta} (-\text{sen}\theta) \frac{d}{dx} \left[\text{sen}\theta (-\text{sen}\theta) \frac{dP}{dx} \right] = \frac{d}{dx} \left[\text{sen}^2\theta \frac{dP}{dx} \right] = \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right]$$

e obtemos a equação de Legendre na forma

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + l(l+1)P = 0, \tag{7.6}$$

cujas soluções são os polinômios de Legendre

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\ &\vdots \\ P_l(x) &= \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \end{aligned} \quad \text{Fórmula de Rodrigues} \tag{7.7}$$

¹No caso mais geral essa constante de separação pode ser real.

Os polinômios $P_l(x)$ satisfazem uma Equação do tipo Sturm-Liouville e também satisfazem as condições de contorno

$$\{p(x) [P_l(x)P_{l'}'(x) - P_l'(x)P_{l'}(x)]\} \Big|_{-1}^1 = 0 .$$

Portanto os polinômios $P_l(x)$ formam um conjunto completo e ortogonal

$$\int_{-1}^1 dx P_{l'}(x) P_l(x) = \frac{2}{2l+1} \delta_{l,l'} , \tag{7.8}$$

com $r(x) = 1$. A constante de normalização é $N_l = \sqrt{\frac{2}{2l+1}}$.

⇒ **Exemplo:** Potencial produzido por uma casca esférica de raio a , com

$$V(a, \theta) = \begin{cases} +V & 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \\ -V & +\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \end{cases}$$

O sistema tem simetria azimutal, pois V não depende de φ , portanto

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right] P_l(\cos\theta) . \tag{7.9}$$

Temos duas situações diferentes:

→ para $r < a$ devemos fazer

$$B_l = 0 \Rightarrow \phi = \sum_l A_l r^l P_l(\cos\theta) .$$

→ para $r > a$ devemos fazer

$$A_l = 0 \Rightarrow \phi = \sum_l \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta) .$$

Consideremos o primeiro caso ($r < a$). Como a função $V(a, \theta)$ é ímpar em relação à coordenada θ , somente os coeficientes A_l com l ímpar são diferentes de zero. Para determinar os coeficientes A_l restantes, impomos condições de contorno na esfera, $r = a$, e utilizamos a ortogonalidade do conjunto $\{P_l(\cos\theta)\}$

$$\begin{aligned} \phi(a, \theta) &= \sum_l A_l a^l P_l(\cos\theta) \\ \int_0^\pi P_{l'}(\theta) \phi(a, \theta) \sin\theta d\theta &= \sum_l A_l a^l \underbrace{\int_0^\pi P_{l'}(\cos\theta) P_l(\cos\theta) \sin\theta d\theta}_{\frac{2\delta_{l',l}}{2l+1}} \end{aligned}$$

$$A_l a^l \frac{2}{2l+1} = \int_0^\pi \phi(a, \theta) P_l(\cos\theta) \sin\theta d\theta$$

$$A_l = \frac{2l+1}{2a^l} 2 \int_0^1 V P_l(x) dx = \frac{V}{a^l} \left(\frac{-1}{2}\right)^{\frac{l-1}{2}} \frac{(2l+1)(l-2)!!}{2 \left(\frac{l+1}{2}\right)!},$$

onde

$$n!! = \begin{cases} n \cdot (n-2) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1 & \text{para } n > 0 \text{ ímpar} \\ n \cdot (n-2) \cdots 6 \cdot 4 \cdot 2 & \text{para } n > 0 \text{ par} \\ 1 & \text{para } n = -1, 0. \end{cases}$$

Usando os coeficientes obtidos acima, escrevemos o potencial como uma série de potências ímpares da variável r e os respectivos polinômios de Legendre

$$\phi(r, \theta) = V \left[\frac{3r}{2a} P_1(\cos\theta) - \frac{7}{8} \left(\frac{r}{a}\right)^3 P_3(\cos\theta) + \frac{11}{16} \left(\frac{r}{a}\right)^5 P_5(\cos\theta) + \dots \right]$$

Para $r > a$ o procedimento é o mesmo e obtemos

$$\phi(r, \theta) = V \left[\frac{3}{2} \left(\frac{a}{r}\right)^2 P_1(\cos\theta) - \frac{7}{8} \left(\frac{a}{r}\right)^4 P_3(\cos\theta) + \dots \right] \quad \Leftarrow$$

7.2 Expansão da função de Green $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ com simetria axial

Para um observador fixo na posição \mathbf{r} , o potencial $\phi(\mathbf{r})$ pode ser calculado pela fórmula de Coulomb

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV', \quad (7.10)$$

na ausência de condições de contorno. Pretendemos expandir a função de Green como uma série de autofunções do operador Laplaceano escrito em coordenadas esféricas, para representar com mais simplicidade problemas sujeitos a condições de contorno esféricas. Inicialmente, procedemos expandindo, inicialmente, a função $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ e incluímos as condições de contorno posteriormente.

No caso mais geral, em que a posição do observador é descrita pelo vetor arbitrário \mathbf{r} , temos a situação ilustrada pela Figura 7.1a), onde $\gamma = \widehat{\mathbf{r}\mathbf{r}'}$, com θ e θ' arbitrários. Mas se o vetor \mathbf{r}' se mantém fixo podemos orientá-lo paralelamente ao eixo \hat{z} , sem perda de generalidade, o que resulta em $\theta' = 0$ e $\gamma = \theta$. Tal situação é ilustrada pela Figura 7.1b). Com $\mathbf{r}' \parallel \hat{z}$, a função $1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ passa a ter simetria azimutal e podemos representá-la como uma série de polinômios de Legendre

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta)^{1/2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta), \quad (7.11)$$

onde θ é o ângulo entre \mathbf{r} e o eixo \hat{z} , e os coeficientes A_l e B_l dependem parametricamente de \mathbf{r}' .

Os coeficientes da série (7.11) são únicos e independentes do vetor \mathbf{r} , portanto temos a liberdade de orientar \mathbf{r} arbitrariamente para calcular seus coeficientes, pois os coeficientes da expansão devem ser únicos (seção 6.6). A orientação mais conveniente é $\mathbf{r} \parallel \hat{z}$, tal que $\theta = 0$, pois

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \longrightarrow \frac{1}{(r^2 + r'^2 - 2rr')^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{(r-r')^2}} = \frac{1}{|r-r'|}.$$

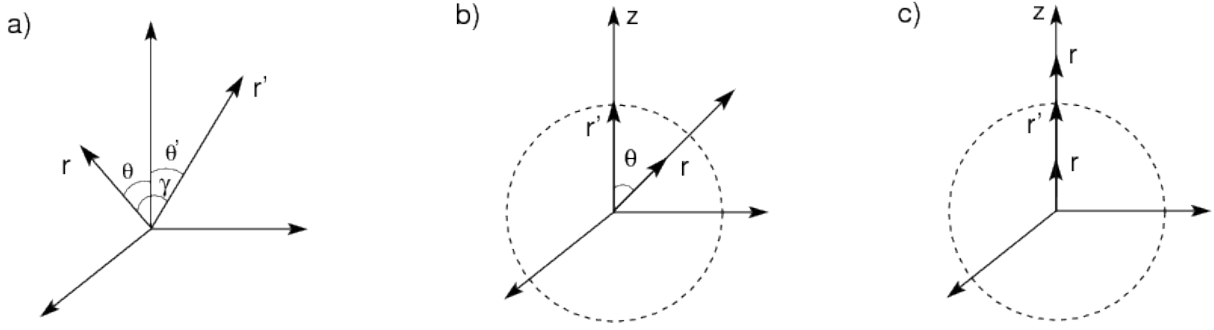


Figura 7.1: a) Vetores \mathbf{r} e \mathbf{r}' arbitrariamente orientados, formando um ângulo γ entre si. b) Vetor $\mathbf{r}' \parallel \hat{z}$, tal que $\theta' = 0$ e $\gamma = \theta$, e \mathbf{r} arbitrariamente orientado. Note que \mathbf{r}' define duas regiões do espaço, onde $\mathbf{r}_< \equiv \mathbf{r} < \mathbf{r}'$ ou $\mathbf{r}_> \equiv \mathbf{r} > \mathbf{r}'$. c) Ambos os vetores \mathbf{r} e \mathbf{r}' alinhados com o eixo \hat{z} , tal que $\gamma = \theta' = \theta = 0$.

Note que $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}$, portanto poderíamos igualmente trocar $\mathbf{r} \Leftrightarrow \mathbf{r}'$ nessa derivação.

Para $r > r'$, temos $r \equiv r_>$ e $r' \equiv r_<$ em

$$\frac{1}{|r - r'|} = \frac{1}{r \left(1 - \frac{r'}{r}\right)} = \frac{1}{r_> \left(1 - \frac{r_<}{r_>}\right)} = \frac{1}{r_>} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l,$$

onde usamos o identidade

$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{l=0}^{\infty} x^l.$$

Para $r < r'$, temos $r' \equiv r_>$ e $r \equiv r_<$ em

$$\frac{1}{|r - r'|} = \frac{1}{r' \left(1 - \frac{r}{r'}\right)} = \frac{1}{r_> \left(1 - \frac{r_<}{r_>}\right)}.$$

Portanto, de maneira geral,

$$\frac{1}{|r - r'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}, \quad (7.12)$$

com $r_>$ e $r_<$ sendo, respectivamente, o maior e o menor entre r e r' .

Para calcular os coeficientes igualamos as séries (7.11) e (7.12), levando em conta que $P_l(\cos\theta) = 1$ para $\theta = 0$. Para $r > r'$ temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{|r - r'|} &= \sum_{l=0}^{\infty} B_l \frac{1}{r_>^{l+1}} \\ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} &= \sum_{l=0}^{\infty} B_l \frac{1}{r_>^{l+1}} \quad \Rightarrow \quad B_l = r_<^l = r^l, \end{aligned}$$

enquanto que, para $r < r'$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|r - r'|} &= \sum_{l=0}^{\infty} A_l r_<^l \\ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} &= \sum_{l=0}^{\infty} A_l r_<^l \quad \Rightarrow \quad A_l = \frac{1}{r_>^{l+1}} = \frac{1}{r_>^{l+1}}. \end{aligned}$$

Portanto, para o caso em que um dos vetores \mathbf{r} ou \mathbf{r}' é mantido fixo enquanto o outro é posicionado arbitrariamente, a função de Green pode ser expressa na forma

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos\gamma), \quad (7.13)$$

com $\gamma = \theta$ ou $\gamma = \theta'$, dependendo do caso. Também podemos escolher inicialmente eixos tais que $\mathbf{r} \parallel \hat{z}$, e os resultados serão os mesmos (vamos usar essa configuração para expandir o potencial devido a uma distribuição de carga em multipolos). Se ambos os vetores \mathbf{r} e \mathbf{r}' estiverem arbitrariamente orientados, teremos $\cos(\gamma) = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \cos\theta' \cos(\varphi - \varphi')$. Nesse caso a expressão (7.13) deve ser generalizada.

Por fim, no caso particular em que $r = r' = 1$, a equação (7.13) torna-se uma geradora de polinômios de Legendre

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\gamma) \quad (7.14)$$

sobre a esfera de raio unitário.

7.3 Harmônicos Esféricos

Consideramos agora o caso em que $m \neq 0$ na equação de Legendre

$$[(1 - x^2)P']' + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right] P = 0.$$

As soluções da Eq. Geral de Legendre são os polinômios $P_l^m(\cos\theta)$ que podem ser obtidos pela relação de recorrência

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x).$$

Para que $P_l^m(x)$ seja finita em todo intervalo $(-1,1)$ – inclusive em $x = \pm 1$ – devemos ter

$$\begin{cases} l = 0 \text{ ou inteiro positivo} \\ m = \text{inteiro, com } -l \leq m \leq l \end{cases}$$

Os polinômios $P_l^m(x)$ também formam um conjunto completo e ortogonal, com

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_{l'}^m(x) dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{l,l'}.$$

Quando $m \neq 0$, além de $P_l^m(x)$, temos ainda os harmônicos $Q_m(\varphi) = e^{im\varphi}$, com $-l \leq m \leq l$.

Unindo $P_l^m(\cos\theta)$ e $Q_m(\varphi)$, obtemos um conjunto completo de funções ortonormais, que pode ser utilizado para representar qualquer função sobre a esfera de raio unitário

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}.$$

As funções $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ são chamadas **Harmônicos Esféricos**. Algumas de suas propriedades são:

↪ para os harmônicos esféricos complexos:

$$Y_{l,-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{lm}^*(\theta, \varphi)$$

↪ ortonormalidade:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d(\cos\theta) Y_{l'm'}^*(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta, \varphi) = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} \quad (7.15)$$

↪ completiza: considere a expansão de $F(\Omega) \equiv F(\theta, \varphi) = \sum_{l,m} A_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi)$. Usando a ortogonalidade, obtemos

$$A_{lm} = \int F(\theta', \varphi') Y_{lm}^*(\theta', \varphi') d\Omega',$$

onde $d\Omega = d(\cos\theta)d\varphi$. Substituindo A_{lm} na série de $F(\theta, \varphi)$ encontramos

$$F(\theta, \varphi) = \int F(\theta', \varphi') \left[\sum_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) \cdot Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \right] d\Omega' = \int F(\Omega') \delta(\Omega - \Omega') d\Omega'. \quad (7.16)$$

Portanto

$$\sum_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) \cdot Y_{lm}^*(\theta', \varphi') = \delta(\Omega - \Omega') \quad (7.17)$$

representa a completiza do conjunto.

↪ Teorema da adiç3o de harm3nicos esf3ricos:

Sem perda de generalidade, podemos mudar a orientaç3o dos eixos na express3o (7.16) e reescrevê-la em termos dos ângulos recém-definidos. Para a demonstraç3o do teorema, escolhemos orientar o eixo polar na direç3o Ω , ou seja $\hat{z} \parallel (\theta, \varphi)$. Nesse caso obtemos

$$\begin{aligned} Y_{lm}(\theta = 0, \varphi) &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{m,0} \\ \sum_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) \cdot Y_{lm}^*(\theta', \varphi') &\rightarrow \sum_l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} Y_{l0}^*(\gamma) = \sum_l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\gamma) \\ F(\Omega) = \int F(\Omega') \left[\sum_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) \cdot Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \right] d\Omega' &\rightarrow F(\Omega) = \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} \int F(\Omega') P_l(\cos\gamma) d\Omega' \end{aligned}$$

onde γ é o ângulo entre as orientaç3es Ω e Ω' , para a nova escolha de eixos. Como o lado esquerdo da equaç3o (7.16) representa um escalar e seu valor n3o muda com a orientaç3o dos eixos, devemos ter

$$\sum_l \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos\gamma) = \sum_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) \cdot Y_{lm}^*(\theta', \varphi').$$

Igualando os termos pertencentes ao mesmo subespaço l encontramos a regra para adiç3o de harm3nicos esf3ricos

$$P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (7.18)$$

Podemos também expressar (7.18) em termos de polinômios de Legendre, na forma

$$P_l(\cos\gamma) = P_l(\cos\theta) P_l(\cos\theta') + 2 \sum_{m=1}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos\theta) P_l^m(\cos\theta') \cos[m(\varphi - \varphi')]$$

Alguns exemplos de harmônicos esféricos são

$$\begin{aligned}
 l = 0 \quad & Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\
 l = 1 \quad & \begin{cases} Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \operatorname{sen}\theta e^{i\varphi} \\ Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \end{cases} \\
 l = 2 \quad & \begin{cases} Y_{22} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \operatorname{sen}^2\theta e^{i2\varphi} \\ Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \operatorname{sen}\theta \cos\theta e^{i\varphi} \\ Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2\theta - \frac{1}{2}\right) \end{cases} \\
 l = 3 \quad & \begin{cases} Y_{33} = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{35}{4\pi}} \operatorname{sen}^3\theta e^{i3\varphi} \\ Y_{32} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{105}{2\pi}} \operatorname{sen}^2\theta \cos\theta e^{i2\varphi} \\ Y_{31} = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{21}{4\pi}} \operatorname{sen}\theta(5\cos^2\theta - 1) e^{i\varphi} \\ Y_{30} = \sqrt{\frac{7}{4\pi}} \left(\frac{5}{2} \cos^3\theta - \frac{3}{2} \cos\theta\right) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Os harmônicos esféricos nos permitem expressar **qualquer** função $\phi(\mathbf{r})$ em coordenadas esféricas na forma

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[A_{lm} r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}} \right] Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

com \mathbf{r} orientado arbitrariamente no espaço.

Por exemplo, se \mathbf{r} e \mathbf{r}' são dois vetores quaisquer, a situação ilustrada pela Figura 7.1a pode ser decrita pela função de Green

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos\gamma) \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (7.19)
 \end{aligned}$$

Note que as variáveis (θ', φ') e (θ, φ) estão fatoradas, portanto é possível somar livremente sobre a densidade de carga, em (θ', φ') , para obter o potencial em (θ, φ) .

Por fim, consideremos o potencial, livre de condições de contorno, produzido por uma distribuição de cargas $\rho(\mathbf{r}')$ localizada em torno da origem. Nesse caso podemos calcular $\phi(\mathbf{r})$ substituindo a expressão (7.19) na fórmula de Coulomb

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') \left[\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \right] dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \left[\int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') r'^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') dV' \right] \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^{l+1}} \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l,m} \frac{1}{2l+1} q_{lm}[\rho(\mathbf{r}')] \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^{l+1}}, \end{aligned} \tag{7.20}$$

onde $q_{lm}[\rho(\mathbf{r}')]$ é um funcional da densidade de carga, denominado tensor **momento de multipolo** de ordem l

$$q_{lm}[\rho(\mathbf{r}')] = \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') r'^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') dV'. \tag{7.21}$$

As expressões (7.20) e (7.21) definem a representação esférica dos multipolos, em termos das autofunções do Laplaceano esférico. No entanto, a multiplicidade e a representação dos momentos deve variar de acordo com o sistema de coordenadas utilizado, como veremos adiante.

7.4 Função de Green com condições de contorno esféricas

Até então consideramos potenciais na ausência de condições de contorno. Um caso um pouco mais geral consiste em expandir a função de Green para a região exterior de uma esfera condutora com potencial nulo. Tal função de Green (Eq. 5.15) foi obtida pelo método da carga imagem

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{a/r'}{\left| \mathbf{r} - \left(\frac{a^2}{r'} \right) \mathbf{n}' \right|} \tag{7.22}$$

→ **Exercício:** Utilizando os métodos descritos na seção 7.2, mostre que

$$\begin{aligned} G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{a/r'}{\left| \mathbf{r} - \left(\frac{a^2}{r'} \right) \mathbf{n}' \right|} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \left(\frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} - \frac{1}{a} \left(\frac{a^2}{rr'} \right)^{l+1} \right) Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega). \end{aligned}$$

Note que $G(a, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}, a) = 0$ satisfazendo Dirichlet. ←

Um caso ainda mais geral, no entanto, consiste em se obter a função de Green entre duas

superfícies esféricas com condições de Dirichlet $V = 0$. Escrevendo a equação de Green em coordenadas esféricas obtemos

$$\begin{aligned}\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &= -4\pi \frac{\delta(r - r')}{r^2} \sum_l \sum_m Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega) ,\end{aligned}\quad (7.23)$$

onde utilizamos a propriedade (7.17) para representar a parte angular da função delta de Dirac. Em caso do problema apresentar simetria esférica, podemos simplificar a Eq. (7.23) escrevendo $\nabla^2 G(r) = -\delta(r)/r^2$.

A função de Green pode ser escrita em termos de harmônicos esféricos

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_l \sum_m A_{lm}(r; \mathbf{r}') Y_{lm}(\Omega) ,$$

onde $A_{lm}(r; \mathbf{r}')$ dependem parametricamente de \mathbf{r}' .

Como as condições de contorno são definidas sobre superfícies esféricas concêntricas, devemos admitir uma solução separável nas coordenadas (r, θ, φ) . Além disso, a função de Green deve ser simétrica com relação à troca de variáveis, $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}', \mathbf{r})$. Por ambas as razões utilizamos o *ansatz*

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{lm} g_{lm}(r, r') Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega) .\quad (7.24)$$

Aplicando o Laplaceano à expressão (7.24), obtemos

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{lm} Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega) \left[\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r g_{lm}(r, r') \right] + \sum_{lm} g_{lm}(r, r') Y_{lm}^*(\Omega') \left[\frac{1}{r^2} \nabla_{\Omega}^2 Y_{lm}(\Omega) \right] ,$$

com

$$\nabla_{\Omega}^2 Y_{lm}^l(\Omega) \equiv \frac{1}{\text{sen}\theta} \frac{d^2}{d\theta^2} (\text{sen}\theta Y_{lm}) + \frac{1}{\text{sen}^2\theta} \frac{d^2}{d\varphi^2} Y_{lm} = -l(l+1) Y_{lm}(\Omega) .$$

Podemos reescrever a equação de Green (7.23) na forma

$$\sum_{lm} \left[\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r g_l(r, r') - l(l+1) \frac{g_l(r, r')}{r^2} \right] Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega) = -4\pi \frac{\delta(r - r')}{r^2} \sum_{lm} Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega) ,$$

de onde obtemos uma equação para a parte radial do potencial

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r g_l(r, r') - \frac{l(l+1)}{r^2} g_l(r, r') = -4\pi \frac{\delta(r - r')}{r^2}\quad (7.25)$$

Para $r \neq r'$, temos a equação homogênea

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r g_l(r, r') - \frac{l(l+1)}{r^2} g_l(r, r') = 0$$

que admite soluções do tipo $g = r^\lambda$, com $\lambda = l$ e $\lambda = -(l+1)$. Portanto, na forma mais geral escrevemos

$$g_l(r, r') = \begin{cases} A(r') r^l + B(r') r^{-(l+1)} & \text{para } r < r' \\ A'(r') r^l + B'(r') r^{-(l+1)} & \text{para } r > r' , \end{cases}$$

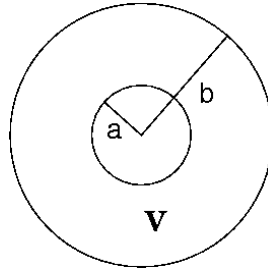


Figura 7.2: Domínio \mathcal{V} entre as esferas de raios a e b , onde a função de Green é obtida.

onde as constantes A , B , A' e B' dependem parametricamente de r' e devem ser determinados pelas condições de contorno. Consideremos o potencial na região \mathcal{V} , entre as esferas concêntricas de raios a e $b > a$, como ilustra a Fig. 7.2.

Para determinar as 4 constantes aplicamos as seguintes condições de vínculo

- a função de Green de Dirichlet, $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, deve se anular em $r = a$ e $r = b$ (2 eqs.);
- $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ deve ser contínua em $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$, com $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ em $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ (1 eq.);
- a descontinuidade da derivada de $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ é determinada integrando-se a equação (7.25) em torno de $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$, para levar em conta o efeito da delta de Dirac (1 eq.).

Para $r < r'$, em $r = a$ temos

$$g_i(a, r') = A(r')a^l + B(r')\frac{1}{a^{l+1}} = 0 \quad \implies \quad B(r') = -A(r')a^{2l+1} .$$

Para $r > r'$, em $r = b$ temos

$$g_i(b, r') = A'(r')b^l + B'(r')\frac{1}{b^{l+1}} = 0 \quad \implies \quad A'(r') = -B'(r')\frac{1}{b^{2l+1}} \quad \text{para } r > r'$$

Portanto

$$g_i(r, r') = \begin{cases} A(r') \left(r^l - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} \right) & , \quad r < r' \\ B(r') \left(\frac{1}{r^{l+1}} - \frac{r^l}{b^{2l+1}} \right) & , \quad r > r' \end{cases}$$

Usamos $B' \rightarrow B$ para simplificar a notação.

Restam ainda as constantes $A(r')$ e $B(r')$. Para eliminar uma delas impomos que $g_i(r, r') = g_i(r', r)$ em $r = r'$,

$$A(r') \left(r'^l - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}} \right) = B(r') \left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'^l}{b^{2l+1}} \right) . \quad (7.26)$$

A equação é satisfeita em $r = r'$ se fazemos

$$\begin{aligned} A(r') &= \left(\frac{1}{r'^{(l+1)}} - \frac{r'^l}{b^{2l+1}} \right) \\ B(r') &= \left(r'^l - \frac{a^{2l+1}}{r'^{(l+1)}} \right) , \end{aligned}$$

tal que, para r e r' quaisquer, temos

$$g_l(r, r') = C \left(r_{<}^l - \frac{a^{2l+1}}{r_{<}^{l+1}} \right) \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right). \quad (7.27)$$

É possível verificar que $g_l(r, r') = g_l(r', r)$ em (7.27) se trocamos as posições $r \leftrightarrow r'$, levando em conta que $r_{>}$ e $r_{<}$ designam o maior e o menor entre r e r' , respectivamente.

Para determinar a constante C multiplicamos a equação de Green por r e integramos no intervalo $[r' - \varepsilon, r' + \varepsilon]$

$$\int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} \frac{d^2}{dr^2} r g_l(r, r') dr - l(l+1) \int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} \frac{g_l(r, r')}{r} dr = -4\pi \int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} \frac{\delta(r - r')}{r} dr.$$

Levando em conta que a função $g_l(r, r')$ deve ser contínua

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} \frac{g_l(r, r')}{r} dr = 0,$$

obtemos

$$\frac{d}{dr} [r g_l(r, r')]_{r'+\varepsilon} - \frac{d}{dr} [r g_l(r, r')]_{r'-\varepsilon} = \frac{-4\pi}{r'} \quad (7.28)$$

Substituindo a expressão (7.27) na equação (7.28) encontra-se, após tomar o limite $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$C = \frac{4\pi}{(2l+1) \left[1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2l+1} \right]}.$$

Reunindo todos os resultados chega-se em

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \sum_{l,m} g_l(r, r') Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega) \\ &= 4\pi \sum_{lm} \frac{Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega)}{(2l+1) \left[1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2l+1} \right]} \left(r_{<}^l - \frac{a^{2l+1}}{r_{<}^{l+1}} \right) \cdot \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right). \end{aligned} \quad (7.29)$$

Esta é a função de Green para o volume entre duas superfícies esféricas concêntricas de raios a e b (com $a < b$) e condições de contorno de Dirichlet.

Casos especiais:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \mathbf{0} &\implies G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{lm} \frac{4\pi}{(2l+1)} \left[\frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} - \frac{1}{b} \left(\frac{r_{>} r_{<}}{b^2} \right)^l \right] Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega) \quad (\text{dentro da esfera}) \\ \mathbf{b} \rightarrow \infty &\implies G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{lm} \frac{4\pi}{(2l+1)} \left[\frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} - \frac{1}{a} \left(\frac{a^2}{r_{>} r_{<}} \right)^{l+1} \right] Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega) \quad (\text{fora da esfera}) \end{aligned}$$

em acordo com o que já havíamos obtido.

Como exemplo consideremos o sistema ilustrado na Fig. (7.3), que é composto por uma esfera metálica de raio b , aterrada com potencial $V = 0$. Dentro da esfera encontra-se um anel de raio a , concêntrico à esfera, carregado com carga Q .

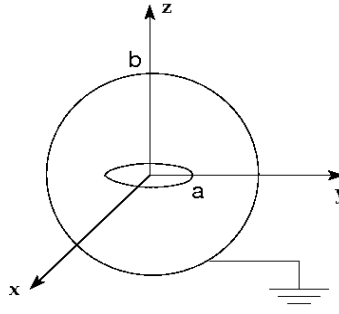


Figura 7.3: Anel de raio a e carga Q no centro de uma esfera de raio b , aterrada com $V = 0$.

O potencial pode ser calculado pela fórmula

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' , \quad (7.30)$$

pois $\phi(r' \in \mathcal{S}) = 0$, sobre a esfera metálica. Dentro da esfera

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 4\pi \sum_{lm} \frac{Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega)}{(2l+1)} r_{<}^l \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right) . \quad (7.31)$$

Representamos a densidade de carga em coordenadas esféricas

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{Q}{2\pi} \frac{\delta(r-a)}{r^2} \delta(\cos\theta) , \quad (7.32)$$

tal que

$$\int \rho(r) dV = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^b Q \cdot \frac{\delta(r-a)}{2\pi r^2} r^2 dr \int_{-1}^1 \delta(\cos\theta) d(\cos\theta) = Q$$

Então, substituindo (7.31) e (7.32) em (7.30), obtemos

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{Q}{2\pi} \frac{\delta(r'-a)}{r'^2} \delta(\cos\theta') \right] \left[4\pi \sum_{lm} \frac{Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega)}{(2l+1)} r_{<}^l \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right) \right] dV' \quad (7.33)$$

Devido à simetria axial do sistema, devemos fazer $m = 0$ em $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ e, portanto,

$$Y_{lm}(\Omega) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \rightarrow \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\theta) .$$

Assim, a fórmula para o potencial torna-se

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_l \int_{\mathcal{V}} \frac{\delta(r'-a)}{2\pi r'^2} \delta(\cos\theta') r_{<}^l \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right) P_l(\cos\theta') P_l(\cos\theta) dV' \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_l^{par} P_l(0) P_l(\cos\theta) \int_0^b r_{<}^l \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right) \delta(r'-a) dr' . \end{aligned} \quad (7.34)$$

Na equação acima utilizamos o fato de que P_l é uma função ímpar para l ímpar, portanto, $P_l(0) = 0$ para l ímpar.

Para a integral em r' fazemos

$$\int_0^b r_{<}^l \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right) \delta(r' - a) dr' =$$

$$\underbrace{\int_0^r}_{\substack{r' = r_{<} \\ r = r_{>}}} r'^l \left(\frac{1}{r^{l+1}} - \frac{r^l}{b^{2l+1}} \right) \delta(r' - a) dr' + \underbrace{\int_r^b}_{\substack{r' = r_{>} \\ r = r_{<}}} r'^l \left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'^l}{b^{2l+1}} \right) \delta(r' - a) dr'$$

Para o primeiro termo, onde $r > r'$ e $r_{>} = r$, obtemos, utilizando a propriedade de filtragem da função delta de Dirac,

$$a^l \left(\frac{1}{r^{l+1}} + \frac{r^l}{b^{2l+1}} \right) .$$

Para o segundo termo, onde $r < r'$ e $r_{<} = r$, obtemos

$$r^l \left(\frac{1}{a^{l+1}} - \frac{a^l}{b^{2l+1}} \right) .$$

De maneira geral podemos escrever

$$r_{<}^l \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right) \quad \text{com} \quad \begin{array}{l} r < a : \left\{ \begin{array}{l} r_{<} = r \\ r_{>} = a \end{array} \right. \\ r > a : \left\{ \begin{array}{l} r_{<} = a \\ r_{>} = r \end{array} \right. \end{array} \quad (7.35)$$

Substituindo (7.35) em (7.34), obtemos a expressão para o potencial

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_l r_{<}^l \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right) P_l(0) P_l(\cos\theta) \quad (7.36)$$

Se l é par, então $l = 2n$, com $n = 0, 1, 2, \dots$. Então

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} r_{<}^{2n} \left(\frac{1}{r_{>}^{2n+1}} - \frac{r_{>}^{2n}}{b^{4n+1}} \right) P_{2n}(0) P_{2n}(\cos\theta) .$$

Podemos ainda usar o resultado

$$P_n(0) = \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n n!} .$$

A densidade de carga induzida na esfera pode ser calculada pela a fórmula

$$\sigma = \epsilon_0 \hat{n} \cdot (-\nabla\phi) \Big|_{r_{<}=a; r_{>}=r=b} = \frac{\partial\phi}{\partial r} \Big|_{r_{<}=a; r_{>}=r=b} \quad (7.37)$$

com $\hat{n} = -\hat{e}_r$. Note que \hat{n} em (7.37) não é o mesmo que aparece na fórmula de Green, pois o volume de interesse está no interior da esfera. Portanto

$$E_n = \frac{\partial\phi}{\partial r} \Big|_{r_{<}=a; r_{>}=r=b} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n} P_{2n}(0) P_{2n}(\cos\theta) \cdot \left[\frac{-(2n+1)}{b^{2n+2}} - \frac{2n b^{2n-1}}{b^{4n+1}} \right]$$

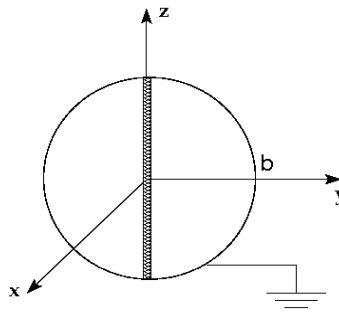


Figura 7.4: Fio homogêneo carregado com carga Q , isolado dentro de esfera condutora de raio b , aterrada em potencial $V = 0$.

e, finalmente,

$$\sigma(\Omega) = \frac{-Q}{4\pi b^2} \sum_{n=0}^{\infty} (4n+1) \left(\frac{a}{b}\right)^{2n} P_{2n}(0) P_{2n}(\cos\theta) .$$

→ **Exercício:** Considere o sistema ilustrado na Fig. 7.4, o qual é formado por um fio homogêneo carregado com carga Q , que se encontra isolado no interior de uma esfera condutora de raio b aterrada ao potencial $V = 0$. Utilizando os mesmos procedimentos que foram aplicados no exemplo anterior demonstre que:

a) o potencial dentro da esfera é dado por

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b} \left\{ -\ln\left(\frac{r}{b}\right) + \sum_{l \neq 0}^{\text{par}} \frac{(2l+1)}{l(l+1)} P_l(\cos\theta) \left[1 - \left(\frac{r}{b}\right)^l\right] \right\} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b} \left\{ -\ln\left(\frac{r}{b}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n+1)}{2n(2n+1)} P_{2n}(\cos\theta) \left[1 - \left(\frac{r}{b}\right)^{2n}\right] \right\} , \end{aligned} \quad (7.38)$$

b) a densidade de carga induzida na superfície condutora é

$$\sigma(\theta) = \frac{-Q}{4\pi b^2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n+1)}{(2n+1)} P_{2n}(\cos\theta) \right\} . \quad (7.39)$$

Capítulo 8

Expansão Multipolar do Potencial

O potencial gerado por uma distribuição de carga localizada pode ser expresso por uma expansão em termos de funções características (ou polinômios). Se a distribuição de carga for localizada, os termos da série decaem com a distância, portanto, quando o observador se encontra distante essa expansão pode ser truncada nos termos de ordem mais baixa.

As vantagens de uma expansão em multipolos são:

- considerar apenas os termos até um índice de corte (*cut-off*), que é determinado segundo um critério particular;
- **simetria**: a simetria da distribuição de carga seleciona os termos não nulos da expansão;
- significado físico claro (transparente) para os multipolos (momentos): monopolo, dipolo, quadrupolo;
- facilidade de manipulação.

8.1 Expansão

Por conveniência assumimos que $\rho(\mathbf{r})$ esteja localizada dentro de uma região delimitada por uma esfera virtual de raio a , como mostra o esquema.

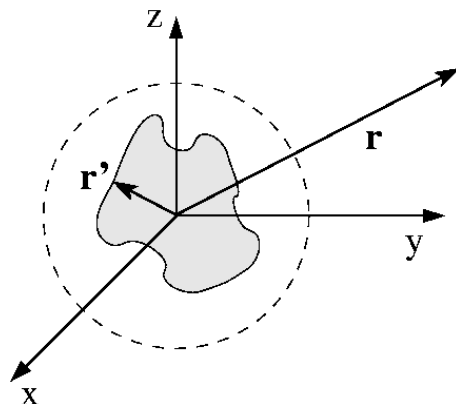


Figura 8.1: Distribuição de carga localizada em torno da origem, delimitada por uma esfera virtual de raio a .

Consideremos a expansão em coordenadas esféricas. Vamos mostrar que para $r > a$ e $r' < a$, qualquer potencial pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}) &= \sum_l \sum_m \frac{B_{lm}}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_l \sum_m \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm}[\mathbf{r}'] \frac{Y_{lm}(\Omega)}{r^{l+1}},\end{aligned}\quad (8.1)$$

com

$$B_{lm}(\mathbf{r}') = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \left(\frac{4\pi}{2l+1} \right) q_{lm}[\mathbf{r}'],$$

para $r' = r_<$ e $r = r_>$, longe de $\rho(\mathbf{r}')$.

Na ausência de condições de contorno (ou condições de Dirichlet no infinito) temos

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV',$$

com

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 4\pi \sum_l \sum_m \frac{Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega)}{2l+1} \left(\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} \right).$$

Portanto

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') \sum_{lm} \frac{4\pi}{(2l+1)} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega) dV'. \quad (8.2)$$

Fazendo $r_< = r'$ e $r_> = r$ em (8.9)

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} \left\{ \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') r'^l Y_{lm}^*(\Omega') dV' \right\} \frac{Y_{lm}(\Omega)}{r^{l+1}}.$$

Comparando com a expansão (8.1), obtemos

$$q_{lm}[\mathbf{r}'] = \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') r'^l Y_{lm}^*(\Omega') dV',$$

onde a notação $[\mathbf{r}']$ representa uma dependência funcional em $\rho(\mathbf{r}')$. O termo q_{lm} é denominado momento de multipolo da distribuição de carga $\rho(\mathbf{r}')$ ¹. Em particular, os momentos mais importantes são:

- $l = 0$, momento de monopolo
- $l = 1$, momento de dipolo
- $l = 2$, momento de quadrupolo
- $l = 3$, momento de octopolo
- $l = 4$, momento de hexadecupolo.

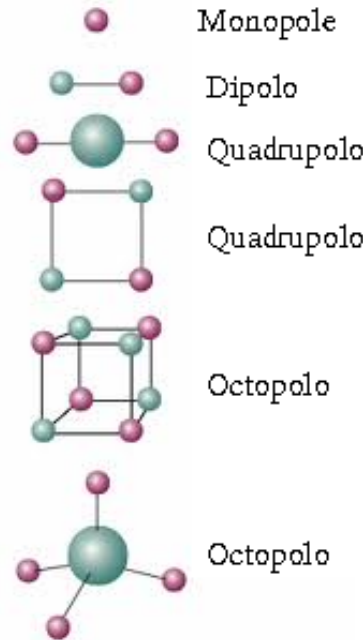


Figura 8.2: Representações gráficas das distribuições de carga correspondentes às várias distribuições multipolares.

Cada momento de multipolo, q_{lm} , possui $2l + 1$ componentes, pois $-l \leq m \leq l$, com apenas $l + 1$ termos independentes. Portanto q_{lm} é considerado o termo de ordem l . Os momentos com $m < 0$ estão associados aos de $m > 0$ pela relação $q_{l,-m} = (-1)^m q_{lm}^*$, pois $Y_{l-m}(\Omega') = (-1)^m Y_{lm}^*(\Omega')$.

⇒ Momento de Monopolo: q_{00}

$$q_{00} = \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') Y_{00}^*(\Omega') dV' = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') dV' = \frac{Q}{\sqrt{4\pi}},$$

onde Q é a carga total em $\rho(\mathbf{r}')$.

⇒ Momento de Dipolo: $q_{l=1,m}$

Para q_{11} temos

$$q_{11} = \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') r' Y_{11}^*(\Omega') dV' = \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') \left(-\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \right) r' \sin \theta' e^{-im\varphi'} dV'.$$

Mas podemos escrever

$$e^{\pm im\varphi'} = \cos(m\varphi') \pm i \sin(m\varphi') = \left(\frac{1}{r' \sin \theta'} \right)^m (x' \pm iy')^m, \quad \begin{aligned} x' &= r' \sin \theta' \cos \varphi' \\ y' &= r' \sin \theta' \sin \varphi' . \end{aligned}$$

¹Em estatística, para um conjunto de dados (observações) $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, o momento de ordem j em relação ao valor p é $\sum_i \frac{(x_i - p)^j}{n}$.

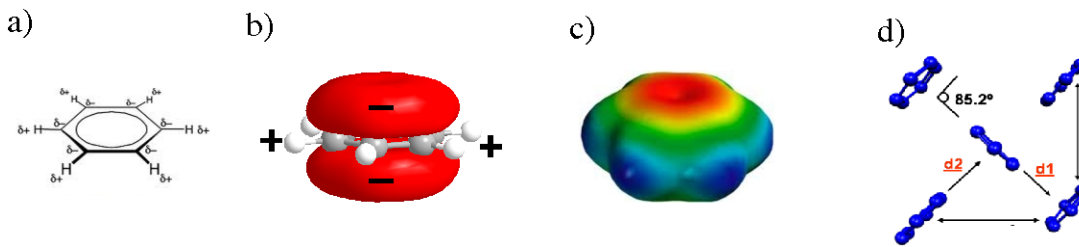


Figura 8.3: A molécula de benzeno é apolar (tem momento de dipolo nulo), mas possui momento de quadrupolo: a) esquema de distribuição pontual de cargas, b) esquema da densidade eletrônica dos orbitais π , c) densidade de cargas calculada para o benzeno. Moléculas quadrupolares cristalizam no empacotamento herringbone (d).

Portanto q_{11} pode ser escrito em coordenadas cartesianas como

$$q_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') (x' - iy') dV' = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_x - ip_y), \quad (8.3)$$

com

$$\mathbf{p} = \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' dV'$$

Analogamente, podemos obter

$$q_{1,-1} = (-1)^1 q_{11}^* = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_x + ip_y).$$

Para q_{10} temos

$$q_{10} = \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') r' Y_{10}^*(\Omega') dV' = \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') \cdot r' \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta' dV'.$$

Utilizando a relação $\cos \theta' = z'/r'$, ficamos com

$$q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') z' dV' = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_z.$$

Em resumo, o momento q_{lm} , definido para o sistemas de coordenadas esféricas, é escrito da seguinte maneira em termos dos momentos dipolares do sistema cartesiano

$$q_{m=+1,0,-1}^{l=1} \equiv \left(-\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_x - ip_y), \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_z, \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_x + ip_y) \right). \quad (8.4)$$

\implies Momento de Quadrupolo: $q_{l=2,m}$

Para q_{22} , q_{21} e q_{20} temos

$$q_{22} = \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') r'^2 Y_{22}^*(\Omega') dV' = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') r'^2 \sin^2 \theta' e^{-2i\varphi'} dV',$$

$$q_{21} = \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') r'^2 Y_{21}^*(\Omega') dV' = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') r'^2 \sin \theta' \cos \theta' e^{-i\varphi'} dV'$$

$$q_{20} = \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') r'^2 Y_{20}^*(\Omega') dV' = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') r'^2 \left[\frac{3}{2} \cos^2 \theta' - \frac{1}{2} \right] dV'.$$

Em coordenadas cartesianas escrevemos para q_{22} , q_{21} e q_{20}

$$\begin{aligned}
 q_{22} &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') r'^2 \sin^2 \theta' \frac{1}{(r' \sin \theta')^2} (x' - iy')^2 dV' = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') (x' - iy')^2 dV' \\
 &= \frac{1}{12} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} (Q_{11} - 2iQ_{12} - Q_{22})
 \end{aligned} \tag{8.5}$$

$$\begin{aligned}
 q_{21} &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') r'^2 \sin \theta' \frac{z'}{r' r' \sin \theta'} (x' - iy') dV' = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') z' (x' - iy') dV' \\
 &= \frac{-1}{3} \sqrt{\frac{15}{8\pi}} (Q_{13} - iQ_{23})
 \end{aligned} \tag{8.6}$$

$$\begin{aligned}
 q_{20} &= \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') r'^2 \left[\frac{3}{2} \frac{z'^2}{r'^2} - \frac{1}{2} \right] dV' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') [3z'^2 - r'^2] dV' \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} Q_{33}
 \end{aligned} \tag{8.7}$$

Para os momentos restantes $q_{-m}^{l=2} = (-1)^m [q_m^{l=2}]^*$.

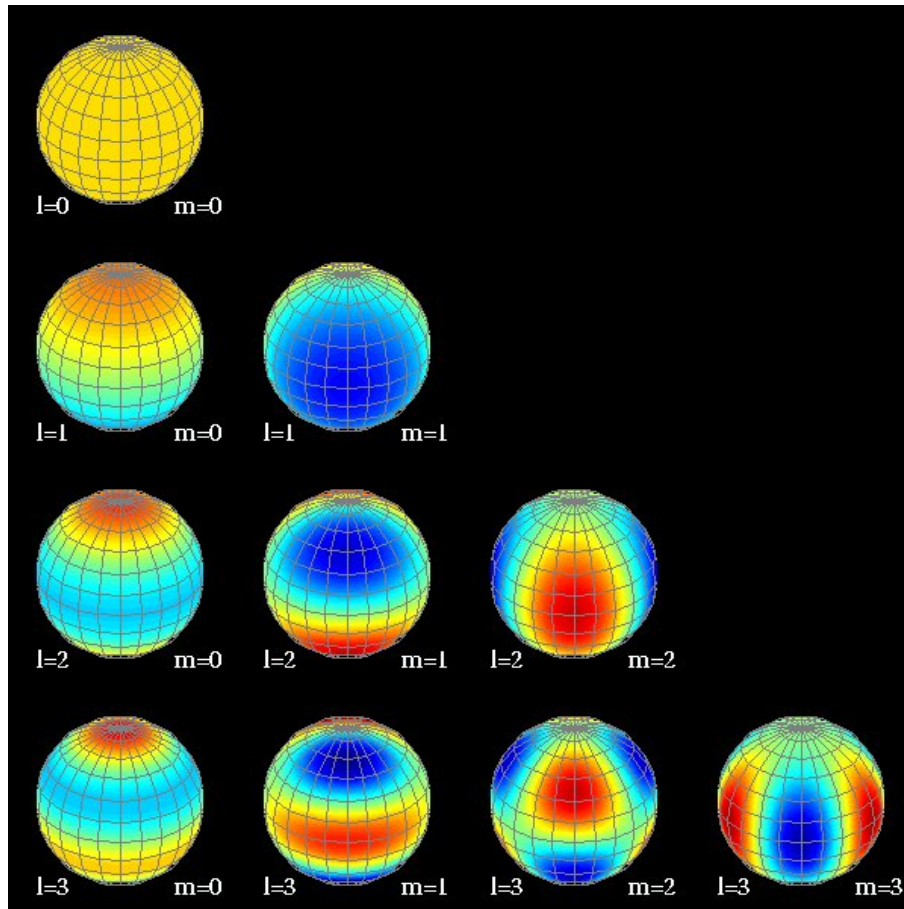


Figura 8.4: Representação gráfica dos multipolos esféricos q_{lm} para os casos $l=0,1,2$ e 3 . (fonte: Harmonic Multipoles and the CMB Sky, <http://find.spa.umn.edu/pryke/logbook/20000922/>)

Os elementos do tensor quadrupolar Q_{ij} em coordenadas cartesianas são escritos como

$$Q_{ij} = \int_V (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\vec{x}') dV' \quad (8.8)$$

com $Q_{ij} = Q_{ji}$. O tensor (8.8) tem traço nulo, portanto apresenta apenas 5 termos independentes.

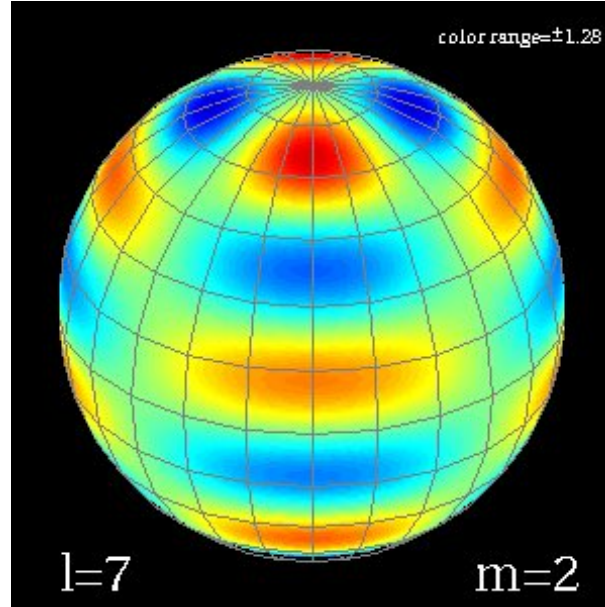


Figura 8.5: Representação gráfica do multipolo esférico q_{lm} para $l=7$ e $m=2$. (fonte: Harmonic Multipoles and the CMB Sky, <http://find.spa.umn.edu/pryke/logbook/20000922/>)

8.2 Expansão Multipolar do Potencial $\phi(\mathbf{r})$ em Coordenadas Cartesianas

A expansão em série de Taylor de uma função $f(\mathbf{r}')$ em torno do ponto $\mathbf{r}' = 0$ é dada por

$$f(\mathbf{r}') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{r}' \cdot \nabla')^n}{n!} f(\mathbf{r}') \Big|_{\mathbf{r}'=0}, \quad (8.9)$$

com

$$\mathbf{r}' \cdot \nabla' = x' \frac{\partial}{\partial x'} + y' \frac{\partial}{\partial y'} + z' \frac{\partial}{\partial z'} = \sum_{i=1}^3 x'_i \frac{\partial}{\partial x'_i} \quad (8.10)$$

em coordenadas cartesianas. Substituindo (8.10) em (8.9), obtemos

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{i=1}^3 x'_i \frac{\partial}{\partial x'_i} \right)^n f(\mathbf{r}') \Big|_{\mathbf{r}'=0} = f(0) + \sum_{i=1}^3 x'_i \frac{\partial f}{\partial x'_i}(0) + \frac{1}{2} \sum_{ij} x'_i x'_j \frac{\partial^2 f(0)}{\partial x'_i \partial x'_j} + \dots$$

Para $f(\mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$, temos

- $f(\mathbf{r}' = 0) = \frac{1}{r} \longrightarrow$ momento de monopolo (1 termo)
- $\frac{\partial f(\mathbf{r}' = 0)}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r^3} \longrightarrow$ momento de dipolo (3 termos)
- $\frac{\partial^2 f(\mathbf{r}' = 0)}{\partial x'_i \partial y'_j} = \frac{3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5} \longrightarrow$ momento de quadrupolo (6 termos independentes)

com $i, j = 1, 2, 3$.

Portanto $\phi(\mathbf{r})$ torna-se

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') \left[\frac{1}{r} + \sum_{i=1}^3 \frac{x_i}{r^3} x'_i + \frac{1}{2} \sum_{ij} \left(\frac{3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5} \right) x'_i x'_j + \dots \right] dV'$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{Q}{r} + \underbrace{\sum_i \frac{x_i p_i}{r^3}}_{\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}} + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5} \int \rho(\mathbf{r}') x'_i x'_j dV' + \dots \right\} .$$

Para o termo de quadrupolo fazemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{(3x_i x_j - r^2 \delta_{ij})}{r^5} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') x'_i x'_j dV' = \\ & \frac{1}{3!} \sum_{ij} \frac{(3x_i x_j - r^2 \delta_{ij})}{r^5} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') 3x'_i x'_j dV' = \\ & \frac{1}{3!} \sum_{ij} \frac{(3x_i x_j - r^2 \delta_{ij})}{r^5} \left\{ \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') [3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}] dV' + \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') r'^2 \delta_{ij} dV' \right\} = \\ & \frac{1}{3!} \sum_{ij} \frac{(3x_i x_j - r^2 \delta_{ij})}{r^5} Q_{ij} + \frac{1}{3!} \sum_i \frac{(3x_i^2 - r^2)}{r^5} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') r'^2 dV' \end{aligned}$$

mas $\sum_i (3x_i^2 - r^2) = 3r^2 - 3r^2 = 0$, portanto

$$\frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') x'_i x'_j dV' = \frac{1}{3!} \sum_{ij} \frac{3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5} Q_{ij} , \quad (8.11)$$

com o tensor momento de quadrupolo escrito no sistema cartesiano

$$Q_{ij} = \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') [3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}] dV' . \quad (8.12)$$

Note que o tensor de quadrupolo tem traço nulo, pois

$$\sum_i Q_{ii} = \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') \sum_i [3x_i'^2 - r'^2] dV' = 0 . \quad (8.13)$$

Podemos utilizar a Eq. (8.13), para obter, quando $i = j$,

$$\frac{1}{3!} \sum_{i=j} \frac{(3x_i x_j - r^2 \delta_{ij})}{r^5} Q_{ij} = \frac{1}{3!} \sum_i \left[\frac{3x_i^2 - r^2}{r^5} \right] Q_{ii} = \frac{1}{2} \sum_i x_i^2 \frac{Q_{ii}}{r^5}. \quad (8.14)$$

Então, as duas formas são equivalentes para a Eq. (8.11)

$$\frac{1}{3!} \sum_{ij} \frac{(3x_i x_j - r^2 \delta_{ij})}{r^5} Q_{ij} = \frac{1}{2r^5} \sum_{ij} Q_{ij} x_i x_j, \quad (8.15)$$

e finalmente ficamos com

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{2r^5} \sum_{ij} Q_{ij} x_i x_j + \dots \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{2r^5} \mathbf{r}^T \mathbf{Q} \mathbf{r} + \dots \right]. \end{aligned}$$

8.3 Algumas propriedades

8.3.1 Somente o momento de ordem mais baixa é independente da origem

Em situações gerais, a expansão multipolar depende da origem do sistema de coordenadas, portanto, mudar a posição da origem pode alterar os coeficientes da expansão. No entanto, o primeiro termo não nulo da expansão, de ordem mais baixa, é sempre independente da origem. Por exemplo, consideremos os casos específicos em que os seguintes multipolos são, em cada caso, os coeficientes não nulos de ordem mais baixa

→ Monopolo:

$$q_{00} = \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}) Y_{00}^*(\Omega) dV = \frac{Q}{\sqrt{4\pi}},$$

é invariante por uma translação do ponto de referência.

→ Dipolo:

Consideremos o vetor momento de dipolo, \mathbf{p} , calculado em relação à origem \mathcal{O}_r

$$\mathbf{p} = \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} dV.$$

Se calculamos o momento de dipolo para a mesma distribuição de carga, agora em relação a uma posição arbitrária \mathbf{a} , como

$$\mathbf{P} = \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{R} dV,$$

onde $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{a}$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r})(\mathbf{r} - \mathbf{a}) dV = \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} dV - \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{a} dV \\ &= \mathbf{p} - \mathbf{a}Q. \end{aligned}$$

Então, para uma translação do ponto de referência $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{a}$ obtemos $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{p} - Q\mathbf{a}$, portanto, o momento do dipolo é invariante se a carga total do sistema é nula². Uma rotação muda a orientação do dipolo, mas não muda seu módulo.

→ Quadrupolo, etc...: (Problema J-4.4)

Teorema: o valor de q_{lm} correspondente ao multipolo não nulo de menor ordem é sempre independente da posição da origem, mas os multipolos de ordem maior, em geral, depende da origem.

8.4 Campo Elétrico de uma expansão multipolar

Aplicando a definição $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ ao potencial $\phi(\mathbf{r})$,

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\Omega)}{r^{l+1}}$$

, expresso em termos de uma expansão multipolar em coordenadas esféricas, obtemos

$$\begin{aligned} E_r^{(lm)} &= \frac{l+1}{(2l+1)\epsilon_0} \frac{q_{lm}}{r^{l+2}} Y_{lm}(\Omega) \\ E_\theta^{(lm)} &= \frac{-1}{(2l+1)\epsilon_0} \frac{q_{lm}}{r^{l+2}} \frac{\partial}{\partial\theta} Y_{lm}(\Omega) \\ E_\varphi^{(lm)} &= \frac{-1}{(2l+1)\epsilon_0} \frac{q_{lm}}{r^{l+2}} \frac{(im)}{\sin\theta} Y_{lm}(\Omega) \end{aligned}$$

Para o momento de dipolo fazemos $l = 1$ nas equações acima, e somamos sobre o índice m . Então

$$E_r^{(l=1)} = \frac{2}{3\epsilon_0 r^3} [q_{11}Y_{11} + q_{1-1}Y_{1-1} + q_{10}Y_{10}] = \frac{2p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

As outras componentes do campo são obtidas de maneira semelhante: $E_\theta^{(l=1)} = \frac{p \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ e $E_\varphi^{(l=1)} = 0$.

De maneira geral podemos fazer, para o termo dipolar $\phi_{dip} = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$, em $\mathbf{r} \neq 0$,

$$\mathbf{E}_{dip}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi_{dip}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-1}{r^3} \nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} \nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) \right], \quad (8.16)$$

para $r \neq 0$. Mas

$$\nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{r} + (\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{p} + \mathbf{p} \times (\nabla \times \mathbf{r}) + \mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{p})$$

com \mathbf{p} constante e $\nabla \times \mathbf{r} \equiv 0$. Ademais

$$\nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{r} = \left[p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z} \right] (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = p_x\hat{i} + p_y\hat{j} + p_z\hat{k} = \mathbf{p}$$

²Equivalente ao teorema dos eixos paralelos em Mecânica

Temos ainda que

$$\nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^{-3}) = \frac{-3\hat{r}}{r^4} r.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{dip}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-\mathbf{p}}{r^3} - \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})(-3\hat{r})}{r^4} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3\hat{r}(\hat{r} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}}{r^3} \right] \end{aligned} \quad (8.17)$$

para o dipolo na origem, $\mathbf{r} \neq 0$. Devemos ainda levar em conta a seguinte propriedade: um campo $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ produzido por uma distribuição localizada de carga satisfaz a seguinte equação

$$\mathbf{E}_{medio} = \frac{1}{4\pi R^3} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) dV = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}}{R^3}, \quad (8.18)$$

onde \mathbf{p} é o momento de dipolo da distribuição de carga localizada no interior de \mathcal{V} . No entanto, o campo obtido em (8.17) produz $\mathbf{E}_{medio} = 0$, portanto, as Eqs. (8.17) e (8.18) são mutuamente consistentes somente se \mathcal{V} não contém a carga que responsável por \mathbf{p} . Se quisermos incluir a origem, onde está localizado \mathbf{p} , preservando a consistência devemos modificar a expressão para $\mathbf{E}_{dip} \rightarrow \mathbf{E}_{dip} + (4/3)\mathbf{p}\delta(\mathbf{r})$, tal que

$$\mathbf{E}_{dip}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3\hat{n}(\hat{n} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}}{r^3} - \frac{4\pi}{3} \mathbf{p}\delta(\mathbf{r}) \right]. \quad (8.19)$$

Se \mathbf{p} aponta na direção \hat{z} , podemos reescrever (8.17) como

$$\mathbf{E}_{dip}(\mathbf{r}) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3\hat{r} \cos \theta - \hat{z}] = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} [2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}],$$

com $\hat{z} = \hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta$.

8.5 Energia de uma Distribuição de Carga em presença de em um campo externo

Considere uma distribuição de carga $\rho(\mathbf{r})$ localizada e um campo externo $\phi(\mathbf{r})$. O potencial pode ser expandido em torno da origem, na seguinte forma

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{r} \cdot \nabla)^n}{n!} \phi(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=0} \\ &= \phi(0) + \sum_{i=1}^3 x_i \frac{\partial \phi(0)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial^2 \phi(0)}{\partial x_i \partial x_j} + \dots \\ &= \phi(0) + \mathbf{r} \cdot \nabla \phi(0) + \frac{1}{2} \sum_{ij} x_i x_j \frac{\partial^2 \phi(0)}{\partial x_i \partial x_j} + \dots \end{aligned} \quad (8.20)$$

ou ainda, na forma

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi(0) - \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(0) - \frac{1}{2} \sum_{ij} x_i x_j \frac{\partial E_j(0)}{\partial x_i} + \dots \quad (8.21)$$

Para obtermos explicitamente o termo de quadrupolo, subtraímos o termo

$$\frac{1}{6} r^2 \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{6} \sum_{ij} r^2 \delta_{ij} \frac{\partial E_j}{\partial x_i} \equiv 0$$

da Eq. (8.21), pois $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ para o campo externo (produzido por cargas fixas no infinito). Então ficamos com a seguinte expansão para $\phi(\mathbf{r})$

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi(0) - \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(0) - \frac{1}{6} \sum_{ij} (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \frac{\partial E_j(0)}{\partial x_i} + \dots \quad (8.22)$$

Com esse resultado, a energia do sistema de cargas localizadas é calculado pela expressão

$$\begin{aligned} W &= \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) dV \\ &= q\phi(0) - \left[\int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} dV \right] \mathbf{E}(0) - \frac{1}{6} \sum_{ij} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}) (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \frac{\partial E_j(0)}{\partial x_i} + \dots \\ &= q\phi(0) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(0) - \frac{1}{6} \sum_{ij} Q_{ij} \frac{\partial E_j(0)}{\partial x_i} + \dots \end{aligned} \quad (8.23)$$

Note que não escrevemos $U = \frac{1}{2} \int \rho \phi dV$ pois o potencial ϕ é produzido por cargas externas fora de \mathcal{V} . Repare também que cada momento de multipolo interage com um grau diferente de variação do potencial

- monopolo (q) \rightarrow potencial (ϕ)
- dipolo (\mathbf{p}) \rightarrow campo elétrico (\mathbf{E})
- quadrupolo (\mathbf{Q}) \rightarrow derivada do campo elétrico ($\partial_i E_j$)
- etc.

\implies **Exemplo:** Distribuição de carga esfericamente simétrica.

Se a distribuição de carga é constante e homogênea, $\rho = (3Q)/(4\pi R_0^3) = \text{constante}$, os momentos de multipolo são obtidos da seguinte maneira

$$\begin{aligned} q_{lm} &= \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}) r^l Y_{lm}^*(\Omega) dV \\ &= \frac{3Q}{4\pi R_0^3} \int_0^{R_0} r^l r^2 dr \int_{\Omega} Y_{lm}^*(\Omega) d\Omega \\ &= \frac{3Q}{4\pi R_0^3} \frac{R_0^{l+3}}{l+3} \int Y_{lm}^*(\Omega) d\Omega . \end{aligned} \quad (8.24)$$

Multiplicando Eq. (8.24) por $Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$, obtemos

$$q_{lm} = \frac{3Q}{4\pi} \frac{R_0^l}{(l+3)} \sqrt{4\pi} \underbrace{\int Y_{00} Y_{lm}^*(\Omega) d\Omega}_{\delta_{l,0} \delta_{m,0}} = \frac{3Q}{\sqrt{4\pi}} \frac{R_0^l}{l+3} \delta_{l,0} \delta_{m,0} .$$

Portanto

$$q_{00} = \frac{Q}{\sqrt{4\pi}}, \quad \text{para } l, m = 0$$

$$q_{lm} = 0, \quad \text{para } \forall l, m \neq 0$$

\implies **Exemplo:** Distribuição esférica de carga com pequena deformação quadrupolar, a densidade de carga ρ é constante, mas o raio da distribuição varia com

$$R = R_0 \left(1 + \sum_{m=-2}^2 \alpha_{2m} Y_{2m}(\theta, \varphi) \right) ,$$

onde $|\alpha_{2m}| \ll 1$.

Os momentos de multipolo são

$$\begin{aligned} q_{lm} &= \int_V \rho(\mathbf{r}) r^l Y_{lm}^*(\Omega) dV = \rho \int_{\Omega} Y_{lm}^* d\Omega \int_0^{R(\theta, \varphi)} r^l r^2 dr \\ &= \rho \int_{\Omega} d\Omega Y_{lm}^*(\Omega) \frac{1}{(l+3)} R^{l+3}(\theta, \varphi) \\ &= \frac{\rho}{(l+3)} R_0^{l+3} \int_{\Omega} d\Omega Y_{lm}^*(\Omega) \left[1 + \sum_{m'=-2}^2 \alpha_{2m'} Y_{2m'}(\Omega) \right]^{l+3} . \end{aligned}$$

Como $|\alpha_{2m}| \ll 1$, podemos expandir o termo entre colchetes até a primeira ordem, e ficamos com

$$\begin{aligned} q_{lm} &= \frac{\rho R_0^{l+3}}{l+3} \int_{\Omega} d\Omega Y_{lm}^*(\Omega) \left[1 + (l+3) \sum_{m'=-2}^2 \alpha_{2m'} Y_{2m'} \right] \\ &= \frac{\rho R_0^{l+3}}{l+3} \int_{\Omega} d\Omega Y_{lm}^*(\Omega) + \rho R_0^{l+3} \sum_{m'} \alpha_{2m'} \underbrace{\int Y_{lm}^*(\Omega) Y_{2m'} d\Omega}_{\delta_{l,2} \delta_{m,m'}} \end{aligned}$$

O primeiro termo fornece o monopolo da distribuição de carga $q_{00} = Q/\sqrt{4\pi}$. O próximo termo não nulo ocorre apenas para $l = 2$

$$q_{2m} = \rho R_0^{l+3} \sum_{m'} \alpha_{2m'} \delta_{l,2} \delta_{m,m'} = \rho R_0^5 \alpha_{2m} .$$

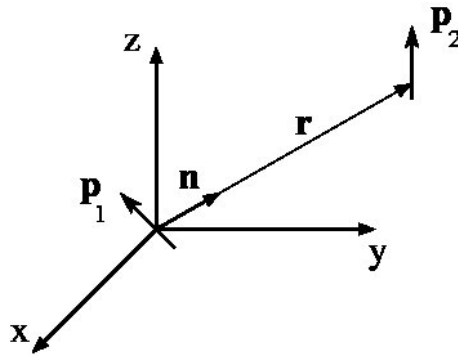


Figura 8.6: Dois dipolos (\mathbf{p}_1 e \mathbf{p}_2) separados pelo vetor posição \mathbf{r} .

8.6 Interação Dipolar

A interação entre dipolos pode ser obtida do termo dipolar de W , ou seja

$$W_{\text{dip}} = -\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{E}_1 ,$$

com \mathbf{E}_1 dado por

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3\hat{n} \cdot (\hat{n} \cdot \mathbf{p}_1) - \mathbf{p}_1}{r^3} \right]$$

Se \mathbf{p} se encontra em \mathbf{r} (vamos chamá-lo \mathbf{p}_2) e o dipolo que produz E_1 é \mathbf{p}_1 , como mostra a Figura 8.6, temos

$$W_{\text{dip}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 - 3(\hat{n} \cdot \mathbf{p}_1)(\hat{n} \cdot \mathbf{p}_2)}{r^3} \right] .$$

Casos particulares são:

- $W_{12} = \frac{-2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_2|}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ ← ←
- $W_{12} = \frac{-|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_2|}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ ↓ ↑
- $W_{12} = \frac{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_2|}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ ↑ ↑
- $W_{12} = \frac{2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_2|}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ ← →

Capítulo 9

Eletróstática em Meios Materiais

9.1 Evolução tecnológica dos dielétricos

O termo **dielétrico** foi definido por Michael Faraday para indicar que algo análogo ao fluxo de corrente ocorre através de um capacitor durante o processo de carga e descarga. De um ponto de vista mais fundamental, dielétricos são isolantes elétricos que podem ser polarizados por um campo elétrico externo. Cargas elétricas não fluem através do dielétrico, como num condutor, mas simplesmente mudam sua distribuição de equilíbrio. Este efeito cria um campo elétrico interno de polarização, o qual reduz o campo elétrico no material. Nos primórdios de sua aplicação esse efeito gerou um grande impacto nos métodos (técnicas) de transmissão de energia elétrica e na engenharia de transformadores. Mais recentemente, estas mesmas propriedades estão tendo tremendo impacto na tecnologia de nanodispositivos, nanoconectores e nanossistemas de processamento. A invenção do transistor mudou o foco de aplicação dos dielétricos de transmissão de potência elétrica para transmissão inteligente. De modo geral, a pesquisa em dielétricos investiga suas propriedades elétricas, mecânicas e químicas.

Uma relação cronológica dos temas (materiais) de pesquisa relevantes mostra a evolução da tecnologia dessa área:

- **até 1960:** eletrofísica, propriedades elétricas de plásticos, capacitores eletrolíticos, fios e cabos, dielétricos orgânicos e inorgânicos, dielétricos líquidos, isolamento em altas temperaturas, circuitos pré-fabricados;
- **até 1980:** dielétricos óxidos para capacitores, filmes finos de nitrato de silício (Si_3N_4) e óxido de silício (SiO_2) para isolamento em aplicações eletrônicas, processamento por plasma, entre outras;
- **até 2000:** diamantes, filmes de carbono e diamante, corrosão, fabricação de circuitos integrados, materiais do grupo III-V, processamento térmico rápido;
- **nanotecnologia e nanoeletrônica:** dielétricos em nanossistemas, materiais com alta constante dielétrica, dielétricos e grafeno, materiais com constante dielétrica ultra-baixa para interconexão de multicamadas, deposição controlada em nível atômico.

9.2 Equações da Eletrostática em Meios Materiais

No vácuo, podemos descrever os fenômenos eletrostáticos por meio das equações

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{e} \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

onde ε_0 é a permissividade do vácuo. A primeira das equações descreve a relação entre o campo \mathbf{E} e as fontes. A segunda estabelece que o campo eletrostático \mathbf{E} é conservativo.

Em um meio material (dielétrico ou condutor) devemos redefinir as fontes de campo pois, do ponto de vista microscópico, $\rho(\mathbf{r})$ representa a carga de N partículas que se movimentam muito desordenadamente, onde $N \sim$ número de Avogadro. No entanto, apesar de $\rho(\mathbf{r})$ microscópico flutuar intensamente no tempo e no espaço,

$$\langle \rho(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{V'} \int \rho(\mathbf{r} + \mathbf{r}') dV' \equiv \rho(\mathbf{r}) \quad (9.1)$$

e

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{V'} \int \mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{r}') dV' \equiv \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (9.2)$$

são bem definidos e independentes do tempo no estado estacionário, devido à média temporal e espacial em (9.1) e (9.2).

Podemos classificar as fontes de carga na matéria em dois grupos

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{cargas independentes (íons, impurezas, etc } \dots) \\ \text{cargas induzidas (polarização)} \end{array} \right.$$

Consideremos uma certa quantidade de carga localizada em torno da origem. Levando-se em conta as diversas contribuições para o campo eletrostático, o potencial gerado por tal volume de carga será dado pelos termos multipolares

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{ij} Q_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5} + \dots \right] \quad (9.3)$$

A contribuição do termo de multipolo de ordem l decai com $r^{-(l+1)}$.

De maneira análoga ao que foi feito para $\langle \rho(\mathbf{r}) \rangle$ e $\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle$, nas Eqs. (9.1) e (9.2), podemos definir a polarização média do meio como

$$\langle \mathbf{P}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{V} \sum_i \mathbf{p}_i \equiv \mathbf{P}(\mathbf{r}) . \quad (9.4)$$

Contabilizando apenas a distorção eletrônica dipolar, a Eq. (9.3) pode ser modificada para descrever o potencial $\phi(\mathbf{r})$ gerado por uma distribuição de carga localizada em torno da origem num meio dielétrico (Figura 9.2)

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \int \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \right] , \quad (9.5)$$

onde $\rho(\mathbf{r}')$ descreve a densidade de cargas de monopolos. O potencial produzido pelo campo de polarização $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ do dielétrico é

$$\phi_P(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' . \quad (9.6)$$

Na integral (9.6), para que $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ seja bem definido, o elemento de volume dV' deve ser muito maior que as dimensões atômicas, porém infinitesimal do ponto de vista macroscópico.

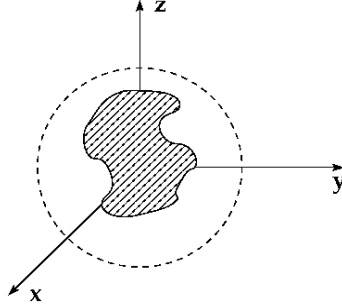


Figura 9.1: Matéria localizada em torno da origem num meio dielétrico.

Podemos reescrever o integrando se utilizarmos a relação

$$\begin{aligned} \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) &= \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}') + \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \\ &= \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} , \end{aligned}$$

que nos permite separar a Eq. (9.6) em duas componentes

$$\phi_P(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \nabla' \cdot \left[\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] dV' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}') dV' .$$

Utilizando o teorema da divergência no primeiro termo obtemos

$$\phi_P(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \hat{n}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (9.7)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma_{pol}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_{pol}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' , \quad (9.8)$$

onde definimos:

- $\sigma_{pol} = \mathbf{P} \cdot \hat{n} = P_n$, a densidade superficial de cargas de polarização
- $\rho_{pol} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$, a densidade volumétrica de cargas de polarização.

Note que o termo

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \hat{n}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS'$$

é nulo em qualquer superfície \mathcal{S} definida no interior do dielétrico, desde que \mathbf{P} seja contínuo. Este termo é não nulo apenas na superfície real (física) do material, onde \mathbf{P} é descontínuo, ou seja, $P \neq 0$ dentro do material e $P = 0$ fora do material.

Portanto, considerando apenas os termos voluméricos, escrevemos o potencial $\phi(\mathbf{r})$ como

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} [\rho(\mathbf{r}') - \nabla' \cdot P(\mathbf{r}')]$$

e o campo elétrico como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} [\rho(\mathbf{r}') - \nabla' \cdot P(\mathbf{r}')] .$$

Levando-se em conta o efeito das cargas independentes (monopolos) e dipolos induzidos ($\rho_{pol} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$), podemos escrever a equação diferencial para o campo \mathbf{E} , em analogia à Eq. de Gauss, como

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_0 - \nabla \cdot \mathbf{P}}{\epsilon_0} ,$$

onde ρ_0 representa somente a densidade de cargas livres (independentes) e $\rho_{pol} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ descreve a densidade volumétrica de cargas de polarização, tal que

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_0 - \rho_{pol}}{\epsilon_0} . \tag{9.9}$$

A Figura 9.2 ilustra uma distribuição de momentos de dipólo elétrico gerando uma densidade local de cargas de polarização. Note que ρ_{pol} é nulo se \mathbf{P} for homogêneo e $\nabla \cdot \mathbf{P} > 0 \rightarrow \rho_{pol} < 0$.

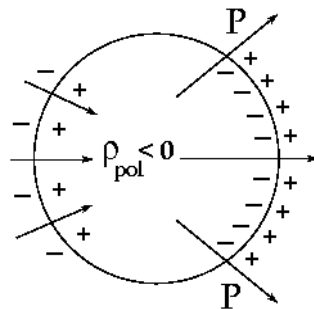


Figura 9.2: Esquema da distribuição de momentos de dipólo elétrico gerando uma densidade local de cargas de polarização ρ_{pol} .

Fazendo $\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_0$ podemos definir o vetor **deslocamento elétrico** $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, tal que $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_0$. Segundo essa definição, o campo de deslocamento elétrico é produzido exclusivamente pelas cargas livres ρ_0 que são, em princípio, conhecidas.

Podemos demonstrar que a totalidade da carga de polarização induzida em um corpo finito deve ser nula, em conformidade com o princípio de conservação de carga, ou seja

$$\oint_S \sigma_p dS + \int_V \rho_p dV = \oint_S \mathbf{P} \cdot \hat{n} dS - \int_V \nabla \cdot \mathbf{P} dV = 0 . \tag{9.10}$$

Temos ainda a seguinte relação entre \mathbf{E} e \mathbf{D} , com $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$ e assumindo-se que $\mathbf{P}(\mathbf{E} = 0) = 0$ para a grande maioria dos meios dielétricos contínuos, com exceção dos materiais ferroelétricos,

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}(\mathbf{E}) \implies \mathbf{E} = \frac{\mathbf{D} - \mathbf{P}(\mathbf{E})}{\epsilon_0} . \tag{9.11}$$

Portanto, a relação matemática exata entre \mathbf{D} e \mathbf{E} é auto-consistente, sem solução analítica simples. Em primeira aproximação tomamos o regime de resposta linear, $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_{el} \mathbf{E}$, que descreve bem a maioria das situações físicas de interesse. Nesse caso,

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi_{el} \mathbf{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_{el}) \mathbf{E} \quad (9.12)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (9.13)$$

com $\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_{el})$. A relação (9.13) é válida no regime linear para campos estáticos e homogêneos moderados. Os efeitos de óptica não linear, onde os campos \mathbf{E} são muito intensos não podem ser descritos pela aproximação (9.12). As constantes χ_{el} e $\varepsilon = (1 + \chi_{el})$ são a susceptibilidade elétrica e a constante dielétrica do meio, respectivamente. Para os regimes eletrostáticos, $\chi_{el} \geq 0$ e $\varepsilon \geq 1$. Contudo, em situações dinâmicas ambas as constantes são complexas, para poder descrever o comportamento reativo do meio. Além disso, a relação escalar entre \mathbf{D} e \mathbf{E} é uma aproximação, pois só ocorre para líquidos, gases e materiais amorfos (isotrópicos). No caso geral temos $P_\alpha = \sum_\beta \varepsilon_0 \chi_{\alpha\beta}^{el} E_\beta$. Onde os elementos do tensor χ_{el} satisfazem $\chi_{\alpha\beta}^{el} = \chi_{\beta\alpha}^{el}$. A susceptibilidade também pode depender da frequência de excitação, da temperatura do meio e de outros parâmetros físicos, $\chi_{el}(\omega, T, \dots)$.

Finalmente, se o meio for homogêneo podemos escrever

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = \rho_0 \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho_0}{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (9.14)$$

onde \mathbf{E} é o campo macroscópico, ρ_0 é a densidade de cargas livres e ε é a constante dielétrica do meio.

Note que mesmo nos meios materiais a equação $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ permanece inalterada no regime eletrostático. Contudo, essa propriedade não é satisfeita para o campo de deslocamento, pois nesse caso temos $\nabla \times \mathbf{D} = \varepsilon_0 (\nabla \times \mathbf{E}) + \nabla \times \mathbf{P} = \nabla \times \mathbf{P}$. Em situações gerais $\nabla \times \mathbf{D} = \nabla \times \mathbf{P} \neq 0$, de onde se conclui que o campo \mathbf{D} não pode ser derivado de um potencial escalar.

9.3 Condições de Contorno

Escrevendo a equação $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_0$ na forma integral, para uma superfície fechada infinitesimal que atravessa a fronteira entre os meios 1 e 2, verificamos que a componente do campo \mathbf{D} normal à interface pode ser descontínua

$$D_1^\perp - D_2^\perp = \sigma_0, \quad (9.15)$$

se existir uma densidade superficial de carga livre (independente) na interface, σ_0 . Quando $\sigma_0 = 0$ o campo \mathbf{D} é contínuo, mas

$$\varepsilon_0 E_1^\perp - \varepsilon_0 E_2^\perp = P_2^\perp - P_1^\perp \quad (9.16)$$

$$E_1^\perp - E_2^\perp = \frac{\sigma_{pol}}{\varepsilon_0}. \quad (9.17)$$

Para obter a Eq. (9.17) utilizamos a relação $\mathbf{E} = (\mathbf{D} - \mathbf{P}) / \varepsilon_0$. A componente normal do campo \mathbf{E} sempre é descontínua na interface entre dois meios com propriedades dielétricas diferentes, onde se acumulam cargas de polarização, devido às diferenças químicas entre os meios 1 e 2.

Da equação $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, escrita como a integral sobre um caminho fechado que envolve a interface, obtemos

$$E_1^{\parallel} = E_2^{\parallel} \quad (9.18)$$

$$D_1^{\parallel} - P_1^{\parallel} = D_2^{\parallel} - P_2^{\parallel}, \quad (9.19)$$

para as componentes paralelas à interface. O potencial elétrico é contínuo na interface, $\phi_1 = \phi_2$.

Para um dielétrico homogêneo temos

$$\begin{aligned} \rho_{pol} &= -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\nabla \cdot (\varepsilon_0 \chi_{el} \mathbf{E}) = -\nabla \cdot \left(\varepsilon_0 \chi_{el} \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon} \right) \\ \rho_{pol} &= \frac{-\chi_{el}}{1 + \chi_{el}} \rho_0. \end{aligned} \quad (9.20)$$

9.4 O método da carga imagem em meios dielétricos

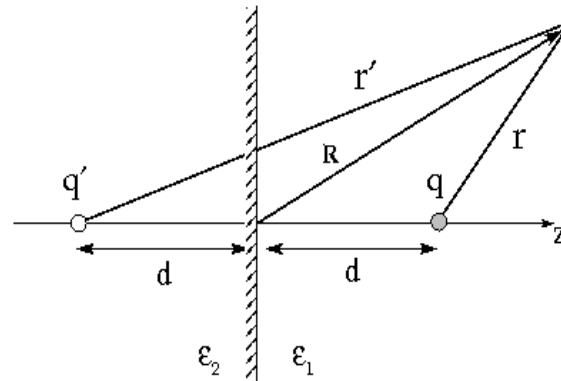


Figura 9.3: Carga real q e carga imagem q' diante da interface entre dois meios com constantes dielétricas ε_1 e ε_2 .

Vamos generalizar o problema da carga imagem para a interface entre dois meios materiais, como mostra a Figura 9.4. Temos as equações

$$\begin{array}{l|l} \varepsilon_1 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho & z > 0 \\ \varepsilon_2 \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 & z < 0 \end{array} \quad \left| \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \text{em todo espaço} \right.$$

Para o lado 1, $z > 0$, o campo \mathbf{E} é produzido pela carga livre q e pelas cargas de polarização induzidas no lado 2 da interface. A equação para o campo no lado 2 não leva em conta a densidade de cargas livres, portanto é gerado apenas pelas cargas de polarização formadas no lado 1 da interface. As cargas de polarização formadas em ambos os lados da interface podem ser representadas por duas cargas imagem, q' e q'' , localizadas em $(0, 0, -d)$ e $(0, 0, +d)$, respectivamente.

Portanto, para $z > 0$, o campo é produzido pela carga livre q e pela carga de polarização q'

$$\phi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1} \left(\frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} \right), \quad (9.21)$$

com $r = \sqrt{\rho^2 + (z - d)^2}$ e $r' = \sqrt{\rho^2 + (z + d)^2}$.

Para o lado 2, $z < 0$, utilizamos a carga imagem q'' que representa a carga de polarização formada no lado 1 da interface

$$\phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q''}{\sqrt{\rho^2 + (z - d)^2}}, \quad (9.22)$$

com $z < 0$.

Devemos determinar q' e q'' , como função de q , ϵ_1 e ϵ_2 . Usando a condição de contorno $E_1^\parallel = E_2^\parallel$, com

$$\begin{aligned} E^\parallel &= -\left. \frac{\partial\phi}{\partial\rho} \right|_{z=0} \\ E_1^\parallel &= \frac{-1}{4\pi\epsilon_1} \left\{ \frac{q(-\rho)}{[\rho^2 + d^2]^{3/2}} + \frac{q'(-\rho)}{[\rho^2 + d^2]^{3/2}} \right\} \\ E_2^\parallel &= \frac{-1}{4\pi\epsilon_2} \left\{ \frac{q'' \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) \cdot 2\rho}{[\rho^2 + (z - d)^2]^{3/2}} \right\} \Big|_{z=0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q''\rho}{[\rho^2 + d^2]^{3/2}} \end{aligned}$$

obtemos

$$\frac{q + q'}{\epsilon_1} = \frac{q''}{\epsilon_2}. \quad (9.23)$$

Da condição de contorno $D_1^\perp = D_2^\perp$, com $\sigma_0 = 0$,

$$\begin{aligned} D^\perp &= \epsilon E^\perp = -\epsilon \hat{z} \cdot \nabla\phi \Big|_{z=0} = -\epsilon \left. \frac{\partial\phi}{\partial z} \right|_{z=0} \\ D_1^\perp &= \frac{-d[q - q']}{4\pi[\rho^2 + d^2]^{3/2}} \\ D_2^\perp &= -\frac{1}{4\pi} \frac{q'' \left(\frac{-1}{2}\right) (-2d)}{[\rho^2 + d^2]^{3/2}} = \frac{-dq''}{4\pi[\rho^2 + d^2]^{3/2}} \end{aligned}$$

resulta

$$q - q' = q''. \quad (9.24)$$

Resolvendo as equações (9.23) e (9.24), para q' e q'' , encontramos

$$q' = -\left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1}\right) q, \quad q'' = \left(\frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}\right) q.$$

É útil analisar o valor das cargas para as situações limite: $\epsilon_2 = \epsilon_1$ e $\epsilon_2 \rightarrow \infty$, como faremos a seguir.

Em cada meio temos χ homogêneo, portanto $\nabla\chi = 0$ e

$$-\nabla \cdot \mathbf{P} = -\epsilon\chi\nabla \cdot \mathbf{E} = -\epsilon_0\chi \frac{\rho_0}{\epsilon} = \begin{cases} -\epsilon_0\chi_1 \frac{\rho_0}{\epsilon_1} = \frac{-\epsilon_0}{\epsilon_1} \chi_1 q \delta(z - d) \frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho} & \text{para } z > 0 \\ 0 & \text{para } z < 0 \end{cases}$$

A carga de polarização no lado 1 é

$$q_{pol}^{(1)} = \int \rho_p^{(1)} dV = \int -\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} \chi_1 q \frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho} \delta(z-d) \rho d\rho d\theta dz = -\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} \chi_1 q = -\frac{\chi_1}{(1+\chi_1)} q .$$

Para o lado 2, $q_{pol}^{(2)} = 0$. Na interface $\nabla\chi \neq 0$, pois $\chi_1 \neq \chi_2$.

A densidade superficial de polarização $\sigma_p \neq 0$ na interface. Utilizando a relação $\sigma_{pol} = \mathbf{P} \cdot \hat{n} = P_n$ e o teorema da divergência, temos localmente na interface

$$q_{pol} = - \int \nabla \cdot \mathbf{P} dV = - \int \mathbf{P} \cdot \hat{n} da = \sigma_p \cdot \Delta A ,$$

com $\sigma_p = [\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2] \hat{n}_{1 \rightarrow 2}$.

Calculando o fluxo de \mathbf{P} na interface

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_2 \cdot \hat{n}_{1 \rightarrow 2} &= -\hat{z} \cdot \mathbf{P}_2 = -\hat{z} \cdot \varepsilon_0 \chi_2 \mathbf{E}_2 = -\hat{z}(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)(-\nabla\phi_2) \Big|_{z=0} = (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) \frac{\partial\phi_2}{\partial z} \Big|_{z=0} \\ &= \left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\varepsilon_2} \right) \frac{1}{4\pi} \frac{q'' \cdot d}{[\rho^2 + d^2]^{\frac{3}{2}}} \\ \mathbf{P}_1 \cdot \hat{n}_{1 \rightarrow 2} &= -\hat{z} \cdot \mathbf{P}_1 = -\hat{z}(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)(-\nabla\phi_1) \Big|_{z=0} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{\partial\phi_1}{\partial z} \Big|_{z=0} \\ &= \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{\varepsilon_1} \cdot \frac{1}{4\pi} \frac{d}{[\rho^2 + d^2]^{\frac{3}{2}}} [q - q'] \end{aligned} \quad (9.25)$$

Portanto

$$\sigma_p = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{[\rho^2 + d^2]^{3/2}} \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} q . \quad (9.26)$$

Integrando σ_p sobre toda a interface

$$\int \sigma_p \rho d\rho d\varphi = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} q . \quad (9.27)$$

Temos os seguintes casos particulares:

- se $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ temos $\sigma_p = 0$, pois \mathbf{P} é contínuo;
- se $\varepsilon_2 \gg \varepsilon_1$,

$$\lim_{\varepsilon_2 \rightarrow \infty} \sigma_p = \frac{-q}{2\pi} \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} \frac{d}{[\rho^2 + d^2]^{3/2}}$$

e a carga na interface é $\frac{-q}{(1+\chi_1)}$

As linhas de campo estão ilustradas na Figure (9.4).

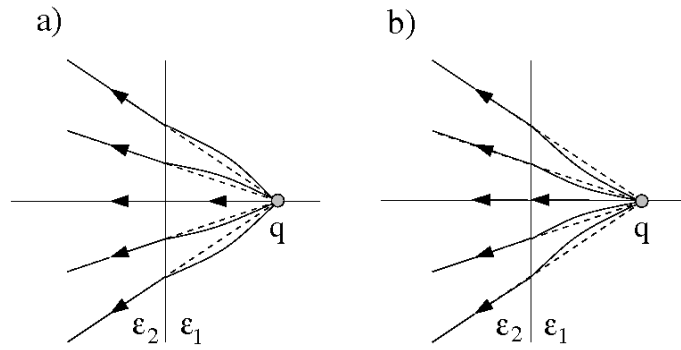


Figura 9.4: Esquema das linhas de campo nas vizinhanças da interface entre dois dielétricos, para os casos: a) $\epsilon_2 > \epsilon_1$ e b) $\epsilon_2 < \epsilon_1$.

9.5 Potencial de uma esfera dielétrica polarizada

Por sua ocorrência em muitas situações físicas, vamos descrever o potencial $\phi(\mathbf{r})$ produzido por uma esfera dielétrica neutra, de raio a , feita de um material dielétrico com permissividade ϵ , em presença de um campo externo \mathbf{E}_0 constante e uniforme, como ilustra a Figura (9.5). Fora da esfera temos o vácuo.

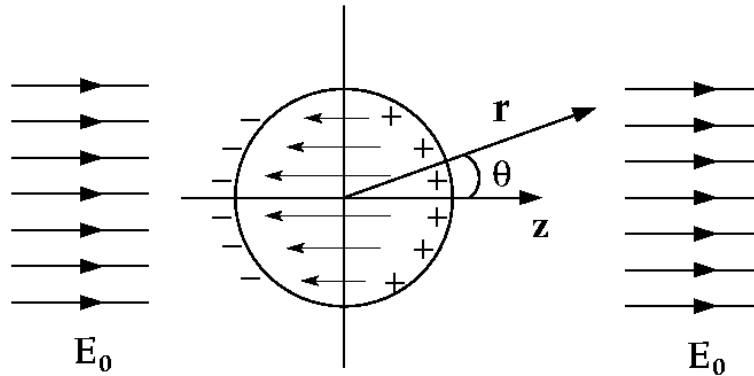


Figura 9.5: Esfera dielétrica neutra em presença de um campo externo \mathbf{E}_0 no vácuo.

Matematicamente temos

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \nabla^2 \phi_{out} &= 0 && \text{para} && r > a \\ \epsilon \nabla^2 \phi_{in} &= 0 && \text{para} && r < a \end{aligned}$$

Para $r > a$, usando coordenadas esféricas e levando em conta a simetria azimutal (axial) do sistema, escrevemos $\phi_{out}(\mathbf{r}) = \phi(r, \theta)$, portanto devemos ter $m=0$. Assim, levando em conta a presença de E_0 devemos escrever, para $r > a$

$$\phi_{out} = \sum_{l=0} \left[B_l r^l + C_l \frac{1}{r^{l+1}} \right] \cdot P_l(\cos \theta) . \tag{9.28}$$

Para $r < a$, devemos lembrar que $\phi(r = 0)$ é finito, portanto

$$\phi_{in}(r, \theta) = \sum_{l=0} A_l r^l P_l(\cos \theta) . \tag{9.29}$$

O potencial devido a \mathbf{E}_0 é $\phi = -\mathbf{E}_0 \mathbf{r} = -E_0 r \cos \theta$, que pode ser igualado a ϕ_{out} ($\mathbf{r} \rightarrow \infty$) para obtermos

$$\phi_{out}(r \rightarrow \infty) = -E_0 r \cos \theta .$$

Lembrando que no infinito os termos proporcionais a C_l em (9.28) se anulam, temos

$$B_0 + B_1 r \cos \theta + B_2 r^2 P_2(\cos \theta) + \dots = -E_0 r \cos \theta . \quad (9.30)$$

Da Eq. (9.30) obtemos que $B_1 = -E_0$ e $B_l = 0$ para $l \neq 1$.

Aplicando as condições de contorno sobre a esfera, devemos ter

$$\begin{aligned} E_{in}^{\parallel} &= E_{out}^{\parallel} \\ \left. \frac{-\partial \phi_{in}}{\partial \theta} \right|_a &= \left. \frac{-\partial \phi_{out}}{\partial \theta} \right|_a \\ \sum_l A_l a^l P'_l(\cos \theta) &= \sum_l C_l \frac{1}{a^{l+1}} P'_l(\cos \theta) - B_1 r \sin \theta . \end{aligned}$$

A equação acima produz as seguintes relações para os coeficientes de ϕ_{in} e ϕ_{out}

$$\frac{A_l}{C_l} = \frac{1}{a^{2l+1}} \quad \text{para} \quad l \neq 1 \quad (9.31)$$

e

$$(A_1 - B_1) = \frac{C_1}{a^3} \quad \text{para} \quad l = 1 , \quad (9.32)$$

com $B_1 = -E_0$.

A outra condição de contorno, $D_{in}^{\perp} = D_{out}^{\perp}$, nos leva a

$$\begin{aligned} \varepsilon E_{in}^{\perp} &= \varepsilon_0 E_{out}^{\perp} \\ \left. -\varepsilon \frac{\partial \phi_{in}}{\partial r} \right|_a &= \left. -\varepsilon_0 \frac{\partial \phi_{out}}{\partial r} \right|_a \\ -\varepsilon \sum_l A_l l a^{l-1} P_l(\cos \theta) &= -\varepsilon_0 \left[\sum_l \frac{C_l [-(l+1)]}{a^{l+2}} + B_1 \cos \theta \right] . \end{aligned}$$

de onde obtemos:

$$\frac{A_l}{C_l} = -\frac{\varepsilon_0 (l+1)}{\varepsilon} \frac{1}{a^{2l+1}} \quad \text{para} \quad l \neq 1 \quad (9.33)$$

e

$$-(\varepsilon A_1 - \varepsilon_0 B_1) = \frac{2}{a^3} \varepsilon_0 C_1 \quad \text{para} \quad l = 1 . \quad (9.34)$$

Comparando as equações para os respectivos termos em l temos, para $l = 1$, duas equações

$$\begin{cases} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} A_1 = -E_0 - 2 \frac{C_1}{a^3} a \\ A_1 = -E_0 + \frac{C_1}{a^3} \end{cases} \quad (9.35)$$

que fornecem

$$A_1 = - \left(\frac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} \right) E_0 \quad (9.36)$$

$$C_1 = \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \right) a^3 E_0 \quad (9.37)$$

Para $l \neq 1$, também temos 2 equações para cada l

$$\begin{cases} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} A_l = \frac{-(l+1)}{a^{2l+1}} C_l \\ A_l = \frac{C_l}{a^{2l+1}} \end{cases} \quad (9.38)$$

de onde obtemos que $C_l = 0$ e $A_l = 0$ para $l \neq 1$.

Portanto ficamos com

$$\phi_{in}(r, \theta) = - \left(\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \right) E_0 r \cos \theta \quad (9.39)$$

$$\phi_{out}(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \right) E_0 \frac{a^3}{r^2} \cos \theta . \quad (9.40)$$

O campo no dielétrico é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{in} &= -\nabla \phi_{in} = \frac{-\partial}{\partial r} \phi_{in} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \phi_{in} \hat{\theta} \\ &= \left(\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \right) E_0 \left[\cos \theta \hat{r} + \frac{1}{r} r (-\sin \theta) \hat{\theta} \right] \\ &= \left(\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \right) E_0 \hat{k}, \quad \text{pois } \begin{cases} \hat{r} = \hat{i} \sin \theta \cos \varphi + \hat{j} \sin \theta \sin \varphi + \hat{k} \cos \theta \\ \hat{\theta} = \hat{i} \cos \theta \cos \varphi + \hat{j} \cos \theta \sin \varphi - \hat{k} \sin \theta \end{cases} \end{aligned}$$

Temos para os seguintes casos limites:

$$\begin{aligned} \text{se } \varepsilon \gg \varepsilon_0, & \quad E_{in} = 0 \quad (\text{esfera condutora}) , \\ \text{se } \varepsilon = \varepsilon_0, & \quad E_{in} = E_0 . \end{aligned}$$

A polarização (volumétrica) na esfera é constante

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \frac{3\varepsilon_0}{(\varepsilon + 2\varepsilon_0)} E_0 \hat{k} = 3\varepsilon_0 \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \right) E_0 \hat{k} , \quad (9.41)$$

portanto $\rho_{pol} = 0$ pois $\nabla \mathbf{P} = 0$. A densidade superficial de polarização é

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \hat{n} = \mathbf{P} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{P \cdot r \cos \theta}{r} = P \cdot \cos \theta = 3\varepsilon_0 \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)}{(\varepsilon + 2\varepsilon_0)} E_0 \cos \theta , \quad (9.42)$$

cuja carga de polarização também é $\int \sigma_p dS = 0$.

9.5.1 Campo de depolarização

Dentro da esfera temos

$$\mathbf{E}_{in} = \mathbf{E}_{ext} + \mathbf{E}_p, \quad \begin{cases} \mathbf{E}_{ext} = E_0 \hat{k} \\ \mathbf{E}_p = \text{campo produzido por } \sigma_p, \text{ chamado de campo de polarização.} \end{cases}$$

Calculando \mathbf{E}_p obtemos

$$\mathbf{E}_p = \mathbf{E}_{in} - \mathbf{E}_{ext} = \left(\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \right) E_0 \hat{k} - E_0 \hat{k} = \left(\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \right) E_0 \hat{k},$$

mas

$$\mathbf{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\mathbf{E} = 3\varepsilon_0 \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \right) E_0 \hat{k}, \quad (9.43)$$

portanto

$$\mathbf{E}_p = -\frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}$$

para uma esfera dielétrica no meio ε_0 , ou seja, \mathbf{E}_p se opõe a \mathbf{E}_0 , por isso o nome de depolarização.

Para os esferóides de revolução é possível escrever

$$E_x^p = -\frac{N_x P_x}{\varepsilon_0}, \quad E_y^p = -\frac{N_y P_y}{\varepsilon_0}, \quad E_z^p = -\frac{N_z P_z}{\varepsilon_0}$$

com $N_x + N_y + N_z = 1$. Por exemplo:

- esfera $\rightarrow N_x = N_y = N_z = \frac{1}{3}$,
- disco $\rightarrow N_x = N_y = 0$ e $N_z = 1$,
- cilindro longo $\rightarrow N_x = N_y = \frac{1}{2}$ e $N_z = 0$.

9.5.2 Cavidade esférica

Para uma cavidade trocamos $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \rightarrow \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}$ na fórmula do campo \mathbf{E}_{in} , e obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{in} &= \frac{3\varepsilon}{2\varepsilon + \varepsilon_0} E_0 \hat{k}, \quad \text{nesse caso com } E_{in} > E_0 \quad \text{para } \varepsilon > \varepsilon_0 \\ \mathbf{P} &= (\varepsilon - \varepsilon_0)\mathbf{E} = 3\varepsilon \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2\varepsilon + \varepsilon_0} \right) E_0 \hat{k}. \end{aligned}$$

Então

$$\mathbf{E}_p = \mathbf{E}_{in} - \mathbf{E}_{ext} = \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2\varepsilon + \varepsilon_0} \right) E_0 \hat{k} = \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon} \quad (9.44)$$

para uma cavidade circular em um meio ε . Portanto \mathbf{E}_p soma-se à \mathbf{E}_{ext} .

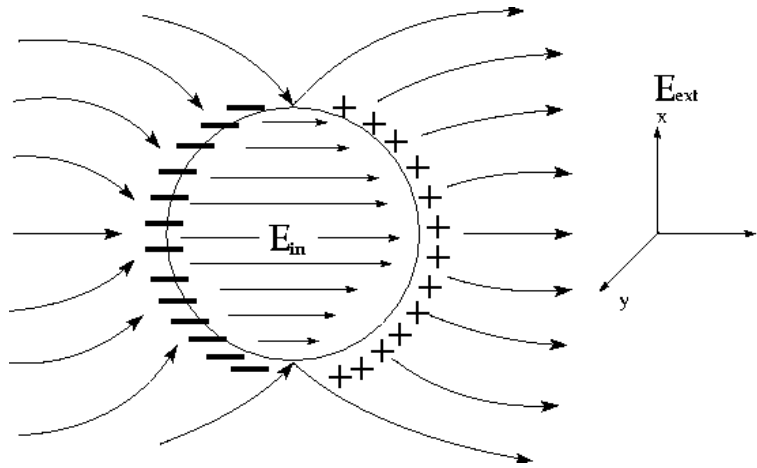


Figura 9.6: xxx

Podemos calcular o campo \mathbf{E} no lado de fora da esfera

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_{out} &= -\frac{\partial}{\partial r}\phi_{out} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\phi_{out} \hat{\theta} \\
 &= -\left[-E_0 \cos \theta + \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}\right) E_0(-2) \left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos \theta\right] \hat{r} \\
 &\quad -\frac{1}{r} \left[-E_0 r(-\sin \theta) + \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}\right) E_0 \frac{a^3}{r^2}(-\sin \theta)\right] \hat{\theta} \\
 &= E_0 \underbrace{(\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta})}_{\hat{k}} + \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}\right) E_0 \left(\frac{a}{r}\right)^3 [2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}] \\
 &= E_0 \hat{k} + \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}\right) E_0 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \cdot \frac{3}{2} \left[(\sin 2\theta \cos \varphi) \hat{i} + (\sin 2\theta \sin \varphi) \hat{j} + \left(\cos 2\theta + \frac{1}{3}\right) \hat{k}\right].
 \end{aligned}$$

No plano (x,z) fazemos $\varphi = 0$, tal que

$$\mathbf{E}_{out} = E_0 \hat{k} + \frac{3}{2} \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}\right) E_0 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \left[\sin 2\theta \hat{i} + \left(\cos 2\theta + \frac{1}{3}\right) \hat{k}\right]$$

Consideremos 2 casos particulares

- **1º caso:** $\varepsilon \gg \varepsilon_0$

$$\mathbf{E}_{out} \approx E_0 \hat{k} + \frac{3}{2} E_0 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \left[\sin 2\theta \hat{i} + \left(\cos 2\theta + \frac{1}{3}\right) \hat{k}\right],$$

Nas proximidades da esfera: $r \rightarrow a$

$$\mathbf{E}_{out} \approx E_0 \hat{k} + \frac{3}{2} E_0 \left[\sin 2\theta \hat{i} + \left(\cos 2\theta + \frac{1}{3}\right) \hat{k}\right]$$

de onde obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}_{out} = E_0 \hat{k} + 2E_0 \hat{k} = 3E_0 \hat{k} \\ \theta = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}_{out} = E_0 \hat{k} - E_0 \hat{k} = 0 \\ \theta = \pi \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}_{out} = E_0 \hat{k} + 2E_0 \hat{k} = 3E_0 \hat{k} \\ \theta = \frac{3\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}_{out} = E_0 \hat{k} - E_0 \hat{k} = 0 \end{array} \right.$$

O perfil do campo nesse caso é ilustrado na Figura (9.6).

- **2º caso:** $\varepsilon_0 \gg \varepsilon$ e nas proximidades da esfera, $r \rightarrow a$,

$$\mathbf{E}_{out} \cong E_0 \hat{k} - \frac{3}{4} E_0 \left[\sin(2\theta) \hat{i} + \left(\cos 2\theta + \frac{1}{3} \right) \hat{k} \right],$$

obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}_{out} = E_0 \hat{k} - E_0 \hat{k} = 0 \\ \theta = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}_{out} = E_0 \hat{k} - \frac{E_0}{2} \hat{k} = \frac{E_0}{2} \hat{k} \\ \theta = \pi \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}_{out} = E_0 \hat{k} - E_0 \hat{k} = 0 \\ \theta = \frac{3\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}_{out} = E_0 \hat{k} + \frac{E_0}{2} \hat{k} = \frac{3}{2} E_0 \hat{k} \end{array} \right.$$

9.6 Relações constitutivas para Polarizibilidade Molecular

9.6.1 Equação de Clausius-Mosotti

A polarizabilidade α , ou susceptibilidade elétrica molecular, é uma grandeza que quantifica a resposta (dinâmica, em geral) de um sistema de cargas ligadas que está sob influência de um campo elétrico local. Atualmente é possível determinar a polarizabilidade a partir de primeiros princípios mas, no fim do século XIX, quando o eletromagnetismo estava sendo formalizado e ainda não se conhecia a constituição da matéria, α tinha que ser escrita em termos de grandezas macroscópicas como a constante dielétrica do material e os campos macroscópicos $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, além de alguma informação acerca do material. Tais equações que estabelecem uma conexão entre grandezas macroscópicas da matéria (sólida, líquida ou gasosa) e propriedades microscópicas são denominadas **equações constitutivas**. Vamos derivar uma solução aproximada, porém bastante útil para esse problema.

Existe uma diferença entre o campo macroscópico no material, dado por $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon$, e o campo local \mathbf{E}_{local} que atua sobre um átomo ou molécula. Em princípio, podemos escrever

$$\mathbf{E}_{local} \equiv \mathbf{E} + \underbrace{\mathbf{E}_{vizinhos} + \mathbf{E}_{pol}}_{\mathbf{E}_{interno}}, \quad (9.45)$$

onde \mathbf{E} é o campo macroscópico e $\mathbf{E}_{interno} \equiv \mathbf{E}_{vizinhos} + \mathbf{E}_{pol}$ é um campo produzido pelas cargas livres e pelos momentos dipolares dentro de um volume ΔV nas proximidades da molécula. ΔV

deve conter muitas moléculas, apesar de ser infinitesimal do ponto de vista macroscópico. Portanto, dividimos a matéria em dois domínios: meio contínuo (*bulk*) e matéria discreta (formada por outros átomos e moléculas).¹ A Figura 9.7 ilustra esse conceito.

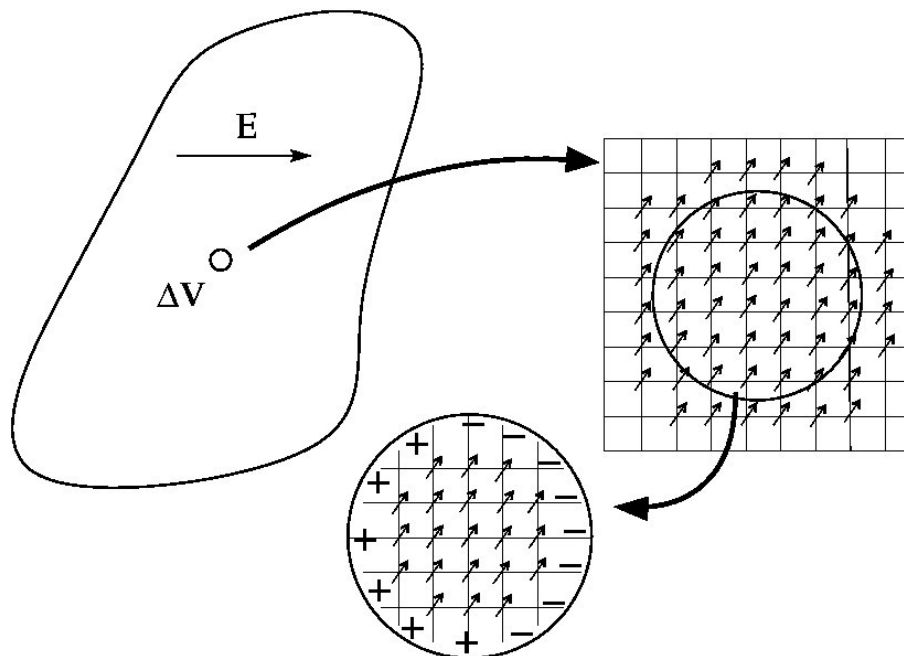


Figura 9.7: Modelo para relacionar as propriedades microscópicas da matéria com suas propriedades macroscópicas. A matéria é dividida em dois domínios com características distintas: um meio dielétrico contínuo envolve uma pequena região (cavidade) descrita por um modelo atômico (momentos dipolares no vácuo).

Segundo esse modelo o campo $\mathbf{E}_{interno}$ é produzido por cargas de polarização σ_{pol} no interior de ΔV e pelas fontes de campo dentro dessa região. Primeiramente, calculamos \mathbf{E}_{pol} como se esse fosse equivalente ao campo no interior de uma cavidade num meio dielétrico. A polarização \mathbf{P} fora da cavidade é contínua e o campo dentro da cavidade é produzido por uma densidade superficial de carga σ_p em sua superfície. Por simplicidade consideramos uma cavidade esférica e a polarização \mathbf{P} constante e orientada da direção \hat{z} , tal que

$$\sigma_{pol} = \mathbf{P} \cdot \hat{n} = \mathbf{P} \cdot (-\hat{r}) = -P \cos \theta ,$$

pois \hat{n} aponta para dentro da cavidade, $\hat{n} = -\hat{r}$. Então

$$\mathbf{E}_{pol} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_s \sigma_p \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS .$$

¹O método de dividir a matéria em domínios com propriedades distintas é aplicado em várias situações diferentes, por exemplo, como no método QM/MM (*Quantum Mechanics/Molecular Mechanics*), que separa a matéria numa (pequena) região descrita pela mecânica quântica circundada por uma grande região descrita classicamente. Dessa maneira, portanto, é possível descrever reações químicas no interior de proteínas.

Se a origem estiver em $\mathbf{r} = 0$, ficamos com

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_{pol}(0) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_s \sigma_p \left(\frac{-\mathbf{r}'}{r'^3} \right) dS' \\
 &= \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \oint_s P \cos\theta \frac{\hat{n}}{R^2} dS \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{P}{R^2} \left[\hat{i} \sin\theta \cos\varphi + \hat{j} \sin\theta \sin\varphi + \hat{k} \cos\theta \right] R^2 d(\cos\theta) d\varphi \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi P \int_{-1}^1 \cos^2\theta d(\cos\theta) \hat{k} = \frac{P}{3\epsilon_0} \hat{k} \\
 \mathbf{E}_{pol}(0) &= \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} .
 \end{aligned} \tag{9.46}$$

\mathbf{E}_{pol} é o campo produzido pelas cargas de polarização, mas também é chamado campo desmagnetizante.

A outra componente, $\mathbf{E}_{vizinhos}$, é o campo gerado pelas moléculas próximas, 1^{os} vizinhos e 2^{os} vizinhos. Para redes com simetria cúbica ou sistemas desordenados $\mathbf{E}_{vizinhos} = 0$. Portanto ficamos com um resultado bastante simples,

$$\mathbf{E}_{interno} = \mathbf{E}_{vizinhos} + \mathbf{E}_{pol} \simeq \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} , \tag{9.47}$$

com

$$\mathbf{P} = N \langle \mathbf{p}_{mol} \rangle = \frac{1}{\Delta V} \sum_i \langle \mathbf{p}_{mol} \rangle_i , \tag{9.48}$$

onde N é o número de dipólos por unidade de volume e $\langle \mathbf{p}_{mol} \rangle$ é o momento de dipolo médio da molécula.

Do ponto de vista microscópico, o momento dipolar dos constituintes do material $\langle \mathbf{p}_{mol} \rangle$ são determinados pela polarizabilidade molecular (no regime linear) da seguinte maneira

$$\langle \mathbf{p}_{mol} \rangle = \epsilon_0 \alpha \mathbf{E}_{local} = \epsilon_0 \alpha (\mathbf{E} + \mathbf{E}_{interno}) . \tag{9.49}$$

A polarização macroscópica é determinada por uma relação similar

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \mathcal{X} \mathbf{E} . \tag{9.50}$$

Substituindo as Eqs. (9.48) e (9.49) em (9.50), obtemos para a polarização

$$\mathbf{P} = N \langle \mathbf{p}_{mol} \rangle = N \epsilon_0 \alpha \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \right) = \epsilon_0 \mathcal{X} \mathbf{E} .$$

Da equação acima escrevemos a relação

$$\mathcal{X} = \frac{N\alpha}{1 - \frac{1}{3}N\alpha} \quad \longrightarrow \quad \alpha = \frac{3}{N} \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \right) , \tag{9.51}$$

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{3 + 2N\alpha}{3 - N\alpha} \tag{9.52}$$

que é denominada equação de Clausius-Mosotti. Para $\varepsilon = \varepsilon_0$ temos $\alpha = 0$. A equação (9.51) é uma equação de estado para dielétricos. Ela também pode ser usada para se calcular a susceptibilidade (ou a constante dielétrica) de inclusões esféricas, ou elipsoidais, em um meio de constante dielétrica conhecida. Tais materiais podem ser chamados de compósitos.

Dependendo da propriedade a ser estudada a relação acima recebe nomes diferentes:

- Poisson \longrightarrow permeabilidade magnética
- Clausius-Mossotti \longrightarrow permitividade elétrica
- Lorentz-Lorenz \longrightarrow refratividade óptica
- Maxwell-Garnett \longrightarrow misturas dielétricas.

9.6.2 Equação de Maxwell-Garnett para misturas dielétricas

Equações similares à relação de Clausius-Mosotti foram derivadas simultaneamente para descrever diferentes propriedades elétricas e magnéticas da matéria. Por exemplo, podemos nos basear na Eq. (9.52) para obter a constante dielétrica **efetiva** (ε_e) de um compósito, ou seja, um meio formado por uma matriz de permitividade ε_1 que contém pequenas partículas de permitividade ε_2 dispersas em seu interior. Nesse caso, podemos substituir $\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon_1$ na Eq. (9.52)

$$\varepsilon_e = \varepsilon_1 \frac{3 + 2N\alpha}{3 - N\alpha} . \quad (9.53)$$

onde $N = N_{esferas}/V_{dieletrico}$ é a densidade volumétrica de esferas no compósito. As partículas são representadas por sua polarizabilidade α , na equação acima. Por simplicidade, vamos supor que as partículas são pequenas esferas, aleatoriamente dispersas na matriz de permitividade ε_1 , e distantes umas das outras. Sendo assim, o momento de dipolo de cada esfera pode ser descrito em termos da Eq. (9.43), fazendo as substituições $\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon_1$ e $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_2$,

$$\mathbf{p} = V_{esfera} \mathbf{P} = V_{esfera} 3\varepsilon_1 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} \mathbf{E} = \varepsilon_1 \alpha \mathbf{E} , \quad (9.54)$$

de onde obtemos a polarizabilidade das partículas

$$\alpha = 3 V_{esfera} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} . \quad (9.55)$$

Substituindo (9.55) em (9.53) obtemos

$$\varepsilon_e = \varepsilon_1 \frac{1 + 2y}{1 - y} , \quad y = V_f \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} , \quad (9.56)$$

onde $V_f = N_{esferas} V_{esfera} / V_{dieletrico}$ é a fração de volume ocupado pelas partículas. Em situações limite temos: $\varepsilon_e \rightarrow \varepsilon_1$ quanto $V_{esfera} \rightarrow 0$. Para o modelo ter validade devemos manter $V_f \ll 1$ e partículas de formato esféricas. Se as partículas forem esferóides de outro formato podemos modificar a Eq. (9.54) para levar em conta sua correta geometria.

9.7 Equação de Poisson-Boltzmann

A primeira teoria quantitativa desenvolvida para descrever soluções eletrolíticas, isto é, soluções de substâncias capazes de conduzir eletricidade, foi proposta por Arrhenius no período de 1883-87. Essa teoria baseia-se em três postulados. O *primeiro postulado* estabelece que certas substâncias, chamadas eletrólitos, são capazes de se separar em partículas de cargas opostas (íons) quando dissolvidas em solventes apropriados, como por exemplo água. O processo de separação dos eletrólitos em íons é denominado dissociação eletrolítica. Por isso, a teoria de Arrhenius também é chamada de *teoria da dissociação eletrolítica*. O *segundo postulado* estabelece que somente uma parte dos eletrólitos dissolvidos se dissociam para formar íons. O *terceiro postulado* da teoria de Arrhenius define uma solução eletrolítica como um sistema ideal, isto é, assume-se que os íons em solução são arranjados de forma aleatória e as forças íon-íon são iguais à zero. Essas suposições levam a um coeficiente de atividade unitário, contrariando os experimentos, levando por desacreditar o modelo para soluções eletrolíticas proposto por Arrhenius.

Uma outra abordagem utilizada para descrever as soluções eletrolíticas foi proposta por Gosh, no período de 1918 a 1920. De acordo com a teoria de Gosh, os íons em solução são organizados de forma muito semelhante à rede cristalina de um sólido. A diferença estaria principalmente na distância entre os íons vizinhos, a qual é maior na solução que no cristal correspondente. O espaço entre os íons são preenchidos por moléculas de solvente que blindam as forças íon-íon para torná-las mais fracas, como resultado do aumento da constante dielétrica e da maior distância entre os íons. A teoria de Gosh propõe que a solubilização é simplesmente equivalente ao processo de dilatação. Com base nesta e em outras suposições, Gosh teve algum sucesso ao obter fórmulas para o cálculo de algumas propriedades das soluções eletrolíticas, como a energia livre de solução, coeficiente de atividade, calor de diluição, entre outras. Na faixa de concentrações moderadas, essas fórmulas estão em acordo qualitativo com os experimentos. As premissas da teoria de Gosh, entretanto, não concordam com a propriedades das soluções e muitas estão em contradição com fatos experimentais. Por exemplo, os dados de raios-X e outros métodos não suportam as idéias de Gosh acerca de que a rede cristalina do sólido original é preservado nas soluções eletrolíticas. Esta discrepância deve-se ao fato de que não é levado em consideração o papel do movimento térmico que distorce a estrutura ordenada da rede iônica.

A teoria moderna de soluções eletrolíticas, baseada nas premissas de Debye e Hückel em 1923, surgiu como uma tentativa de melhorar a teoria de Gosh. Debye e Hückel elaboraram um modelo para soluções que levam em conta as interações íon-íon e o efeito do movimento térmico. Eles adotaram a idéia de que cada íon é cercado predominantemente por íons de sinais opostos, arranjados esféricamente em volta de um íon central escolhido arbitrariamente. Considerando que o principal tipo de movimento em soluções é o translacional (não vibracional, como em cristais), a esfera cercado o íon central não contém sempre os mesmos íons. Há uma troca contínua entre os íons contidos na esfera e outros íons em solução. Tal esfera em volta do íon central é chamada de *atmosfera iônica*. Todos os íons em solução são iguais em todos os aspectos, como mostra a Figura 9.8; cada um deles é envolto por uma atmosfera iônica que, de acordo com Debye e Hückel, distingue as soluções eletrolíticas reais das ideais.

Vamos usar a equação de Poisson (Equação 9.57) para relacionar a densidade média de carga $\rho(\mathbf{r})$ concentrada na atmosfera iônica ao valor do potencial $\Phi(\mathbf{r})$,

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi}{\epsilon}\rho(\mathbf{r}) \quad (9.57)$$

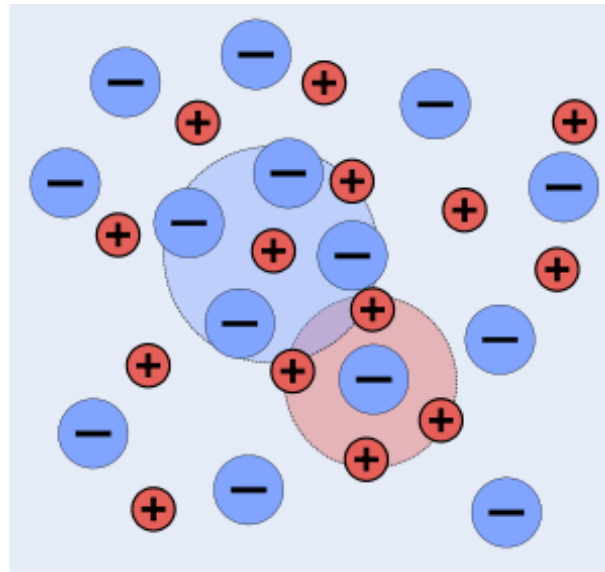


Figura 9.8: Representação de uma solução eletrolítica. Estão demonstradas as atmosferas iônicas dos íons i e j com um círculo tracejado; há equilíbrio dinâmico na atmosfera iônica. O potencial no ponto r é determinado pela contribuição de todos os íons i, j presentes na solução.

onde ε é a constante dielétrica da solução. A equação de Poisson contém duas quantidades desconhecidas, $\rho(\mathbf{r})$ e $\Phi(\mathbf{r})$. Para encontrá-las, é necessário ter uma segunda equação conectando-as. Debye e Hückel derivaram esta equação da seguinte forma.

Considere uma solução com volume V contendo N_i íons do tipo i , cada qual com carga eZ_i , onde e é a carga do elétron e Z_i a valência do íon i . Para uma solução eletricamente neutra temos

$$\sum_i N_i e Z_i = 0 \quad (9.58)$$

A lei da eletroneutralidade é válida não somente para a solução como um todo, mas também para um dado elemento de volume suficientemente grande quando comparado com o tamanho iônico, então

$$\sum_i n_i e Z_i = 0 \quad (9.59)$$

em que n_i é o número de íons da espécie i por unidade de volume, ou seja, sua concentração. Entretanto, a carga de um certo elemento de volume dV situado na vizinhança de um íon será diferente de zero devido a presença da atmosfera iônica. Se o íon central (ou íon de referência) localizado na origem é positivamente carregado, o elemento de volume dV terá um excesso de cargas negativas. Assumindo que a distribuição de Boltzmann é aplicável à distribuição iônica na solução e que as forças agindo entre os íons são eletrostáticas, pode-se expressar a densidade de íons negativos como

$$n_- = n_-^0 \exp \left[+ \frac{eZ_i}{k_B T} \Phi(\mathbf{r}) \right] \quad (9.60)$$

e a densidade de íons positivos por

$$n_+ = n_+^0 \exp \left[- \frac{eZ_i}{k_B T} \Phi(\mathbf{r}) \right], \quad (9.61)$$

sendo que n_+ e n_- são as concentrações de íons próximos à atmosfera iônica, enquanto n_+^0 e n_-^0 são as concentrações longe do íon de referência, e k_B é a constante de Boltzmann. A carga total contida no elemento de volume dV será

$$\left(eZ_+n_+^0 \exp \left[-\frac{eZ_+}{k_B T} \Phi(\mathbf{r}) \right] - eZ_-n_-^0 \exp \left[+\frac{eZ_-}{k_B T} \Phi(\mathbf{r}) \right] \right) dV . \quad (9.62)$$

Levando em consideração que há diferentes espécies iônicas em solução e dando a cada íon um sinal correspondente à sua valência Z_i , podemos escrever

$$\rho(\mathbf{r}) = e \sum_i Z_i n_i^0 \exp \left[-\frac{eZ_i}{k_B T} \Phi(\mathbf{r}) \right] . \quad (9.63)$$

Substituindo a expressão de Boltzmann para $\rho(\mathbf{r})$ na equação de Poisson (Eq. 9.57) nos leva à *Equação de Poisson-Boltzmann*

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi}{\varepsilon} e \sum_i Z_i n_i^0 \exp \left[-\frac{eZ_i}{k_B T} \Phi(\mathbf{r}) \right] . \quad (9.64)$$

9.7.1 Aproximação linear

Para simplificar a equação de Poisson-Boltzmann tomamos o limite linear, no qual a interação eletrostática é pequena em relação à energia térmica, $eZ_i \Phi(\mathbf{r}) \ll k_B T$. Expandindo a exponencial em série de Taylor

$$\exp \left[-\frac{eZ_i}{k_B T} \Phi(\mathbf{r}) \right] = 1 - \frac{eZ_i}{k_B T} \Phi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \left[\frac{eZ_i}{k_B T} \Phi(\mathbf{r}) \right]^2 + \dots \quad (9.65)$$

e levando em conta apenas os dois primeiros termos, obtém-se a seguinte aproximação para $\rho(\mathbf{r})$

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_i eZ_i n_i^0 - \frac{e^2}{k_B T} \sum_i Z_i^2 n_i^0 \Phi(\mathbf{r}) . \quad (9.66)$$

O primeiro termo do lado direito é igual à zero de acordo com a neutralidade elétrica, resultando em

$$\rho(\mathbf{r}) = -\frac{e^2}{k_B T} \sum_i Z_i^2 n_i^0 \Phi(\mathbf{r}) \quad (9.67)$$

e, conseqüentemente,

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = \frac{4\pi e^2}{\varepsilon k_B T} \sum_i Z_i^2 n_i^0 \Phi(\mathbf{r}) . \quad (9.68)$$

Introduzindo uma nova variável, χ , definida por

$$\chi = \sqrt{\frac{4\pi e^2}{\varepsilon k_B T}} \sum_i Z_i^2 n_i^0 \Phi(\mathbf{r}) \quad (9.69)$$

temos

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = \chi^2 \Phi(\mathbf{r}) . \quad (9.70)$$

A quantidade $\frac{1}{\chi}$ corresponde à distância de corte, ou blindagem, para o potencial $\Phi(\mathbf{r})$, portanto é de grande importância na teoria de soluções eletrolíticas, como demonstrado a seguir. Levando em consideração a simetria esférica de uma atmosfera iônica, podemos escrever

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} \right) = \chi^2 \Phi(r) . \quad (9.71)$$

em que r é a distância em relação ao íon central. A solução geral para esta equação diferencial é

$$\Phi(r) = A_1 \frac{e^{-\chi r}}{r} + A_2 \frac{e^{\chi r}}{r} \quad (9.72)$$

As constantes de integração A_1 e A_2 são determinadas pelas condições de contorno. O potencial Φ deve se anular a grandes distâncias do íon central ($\Phi \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$), portanto $A_2 = 0$. Para determinar a constante de integração A_1 , assume-se a primeira aproximação da teoria de Debye-Hückel, segundo a qual íons podem ser considerados pontos materiais contendo certa carga. Neste caso quando $r \rightarrow 0$ o potencial Φ deve tender ao potencial Φ_i do próprio íon, isto é

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Phi(r) = \Phi_i(r) = \frac{eZ_i}{4\pi\epsilon r} . \quad (9.73)$$

Expandindo $e^{-\chi r}$ em torno da origem

$$\Phi(r) = A_1 \frac{e^{-\chi r}}{r} = A_1 \frac{1}{r} \left(1 - \chi r + \frac{1}{2}(\chi r)^2 - \dots \right) \quad (9.74)$$

e tomando o limite $r \rightarrow 0$ obtemos

$$A_1 = \frac{eZ_i}{4\pi\epsilon} , \quad (9.75)$$

tal que

$$\Phi(r) = \frac{eZ_i}{4\pi\epsilon} \frac{e^{-\chi r}}{r} . \quad (9.76)$$

A quantidade Φ na equação acima é o valor médio do potencial no ponto r produzido pelo íon central e sua atmosfera iônica, ou seja, o potencial de Coulomb blindado. Em física de partículas o mesmo tipo de potencial recebe o nome de *Potencial de Yukawa*. O potencial de Coulomb blindado pode ser representado pela série de Fourier

$$\Phi(\mathbf{r}) \propto \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{4\pi}{k^2 + \chi^2} d^3k \quad (9.77)$$

e, dessa forma, $2\pi/\chi$ pode ser entendido com o comprimento de onda de corte que limita a ação do potencial à curtas distâncias.

Podemos determinar o potencial produzido pelos íons que compõem a atmosfera iônica calculando a diferença entre Φ e Φ_i

$$\Phi_{atm}(r) = \Phi(r) - \Phi_i(r) = \frac{eZ_i}{4\pi\epsilon r} (e^{-\chi r} - 1) . \quad (9.78)$$

Próximo ao íon central, podemos determinar o valor limite de Φ_{atm} fazendo $r \rightarrow 0$ e usando o mesmo procedimento acima, isto é, expandindo a função exponencial em uma série e negligenciando os termos de ordem mais baixa, para obter

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Phi_{atm}(r) = -\frac{eZ_i}{4\pi\epsilon} \chi . \quad (9.79)$$

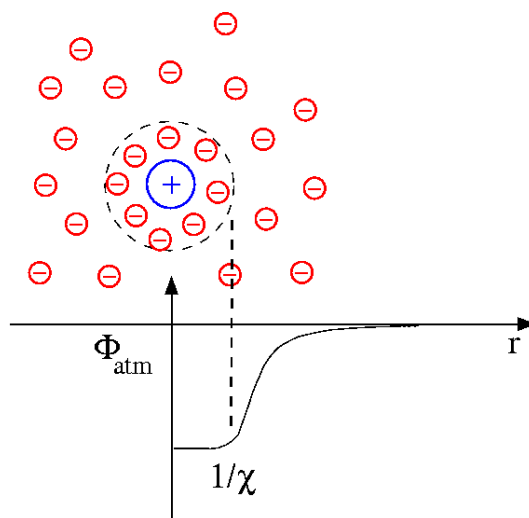


Figura 9.9: xxx

De acordo com a equação acima, a energia do íon central será $eZ_i\Phi_{atm}(r=0)$. A quantidade $1/\chi$ tem dimensões de comprimento e é chamada de comprimento recíproco de Debye-Hückel. Desde que o potencial é produzido não por um único íon mas por uma nuvem iônica como um todo, a quantidade $1/\chi$ pode também ser chamada de espessura, ou raio, da atmosfera iônica.

A equação de Poisson-Boltzmann também é utilizada para descrever processos envolvendo eletrodos, mistelas, colóides, entre outros.²

²Antropov, L. I. *Theoretical Electrochemistry*, 1972; Bard, A. J.; Faulkner, L. R. *Electrochemical methods: fundamentals and applications*, 1980.

Capítulo 10

Equações da Magnetostática

O primeiro estudo sistemático sobre eletricidade e magnetismo foi “*De magnete*”, um tratado elaborado por Willian Gilbert em 1600, no entanto, por ~ 200 anos não ocorreram avanços significativos na compreensão do magnetismo. Até 1820, eletricidade e magnetismo (além da óptica) eram consideradas ciências independentes, com uma fenomenologia própria a cada uma. Além dessas havia o galvanismo¹, que descrevia os efeitos das correntes elétricas produzidas por reações eletroquímicas (em baterias)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Eletricidade} \\ \text{Galvanismo} \longrightarrow \text{efeitos produzidos pela corrente contínua de baterias} \\ \text{Magnetismo} \longrightarrow \text{ciência dos ímãs, agulhas magnéticas, campo mag. terrestre} \end{array} \right.$$

Numa aula de demonstrações em 1820, Oersted observa que uma corrente elétrica deflete a agulha de uma bússula na bancada. Esta foi a primeira observação conclusiva da correlação entre corrente elétrica e magnetismo. Logo em seguida o efeito foi intensamente explorado por Jean Baptiste *Biôt* & Félix *Savart*, André-Marie *Ampère* and Michael *Faraday*, entre outros, que contribuíram para determinar as equações do campo magnético.

Na Magnetostática o campo \mathbf{B} é resultado de correntes estacionárias. A corrente pode ser definida como

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot \hat{n} da$$

onde \mathbf{j} é a densidade de corrente (por unidade de área).

Da **teoria cinética** (microscópica) também podemos escrever

$$\mathbf{j} = \sum_i n_i q_i \langle \mathbf{v}_i \rangle, \quad (10.1)$$

com n_i sendo a densidade volumétrica de partículas com carga q_i e velocidade média $\langle \mathbf{v}_i \rangle$ (velocidade de arrasto).

Da **teoria dos meios contínuo** (macroscópica) temos a Lei de Ohm

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (10.2)$$

onde σ é o tensor de condutividade elétrica, $\sigma = \rho^{-1}$.

¹O termo galvanismo é dado em honra do anatomista Luigi Galvani (1737-98), que descobriu que correntes elétricas podem produzir contrações musculares. Este efeito foi anunciado com a descoberta da eletricidade animal e inspirou histórias de ficção científica da época, tais como “*Frankestein*”.

Para que haja conservação de carga devemos ter para o fluxo de corrente através de uma superfície fechada \mathcal{S}

$$I = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da = \frac{-dQ}{dt} . \quad (10.3)$$

Pelo Teorema da divergência, a Eq. (10.3) pode ser reescrita como

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{j} \, dV = - \int_V \frac{d\rho(\mathbf{r})}{dt} \, dV ,$$

de onde obtemos a Equação de continuidade

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = \frac{-d\rho}{dt} \implies \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{d\rho}{dt} = 0 . \quad (10.4)$$

Portanto, para uma corrente estacionária temos $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$.

10.1 Força Magnética

Dependendo da forma da densidade de corrente, a força magnética pode ser expressa de diferentes maneiras

- para uma densidade linear de carga, $\mathbf{I} = \lambda \mathbf{v}$, temos

$$\mathbf{F}_{mag} = \int_{\mathcal{C}} (\mathbf{I} \times \mathbf{B}) = I \int_{\mathcal{C}} (\vec{dl} \times \mathbf{B}) \quad (10.5)$$

- para uma densidade superficial de carga, $\vec{\kappa} = \sigma \mathbf{v}$, temos

$$\mathbf{F}_{mag} = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \, dq = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \, \sigma da = \int (\kappa \times \mathbf{B}) \, da \quad (10.6)$$

- para uma densidade volumétrica de carga, $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$, temos

$$\mathbf{F}_{mag} = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \, dq = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \, \rho dV = \int (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \, dV . \quad (10.7)$$

nesse caso o torque será

$$\mathbf{N} = \int \mathbf{r} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \, dV \quad (10.8)$$

10.2 Equações Diferenciais da Magnetostática

Duas propriedades determinam a estrutura de um campo vetorial \vec{v} qualquer

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{escoamento (fluxo)} & \longrightarrow \quad \text{div } \vec{v} \equiv \nabla \cdot \vec{v} \\ \text{circulação} & \longrightarrow \quad \text{rot } \vec{v} \equiv \nabla \times \vec{v} \end{array} \right.$$

Para a eletrostática temos

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{e} \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 .$$

Procuramos relações similares para \mathbf{B} . Partindo da fórmula fenomenológica de Biot & Savart

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} . \quad (10.9)$$

Para isso reescrevemos o elemento de corrente na forma

$$I(\mathbf{r}') d\mathbf{l}' = \int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}') \hat{n}' da' \cdot d\mathbf{l}' = \int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}') da' dl'_n .$$

Integrando dl'_n ao longo da direção \hat{n}' resulta em

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' ,$$

que apresenta alguma semelhança com a fórmula de Coulomb para o campo \mathbf{E} . Ainda, utilizando o resultado

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ,$$

e a relação vetorial $\nabla \times (\psi \mathbf{A}) = \psi(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla \psi)$, podemos reescrever na forma

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') - \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] dV' \\ &= \nabla \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \right) \end{aligned} \quad (10.10)$$

$$= \nabla \times \mathbf{A} , \quad (10.11)$$

definindo o potencial vetor \mathbf{A} como

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \nabla \Psi \quad (10.12)$$

com $\Psi(\mathbf{r})$ um potencial escalar qualquer. Para qualquer campo vetorial vale a identidade $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$, portanto

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , \quad (10.13)$$

que é a equação do magnetismo que representa a ausência de monopólos magnéticos.

Conhecendo-se o escoamento de \mathbf{B} devemos determinar sua circulação em cada ponto. Para isso calculamos o rotacional de \mathbf{B}

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} .$$

Considerando a forma explícita de \mathbf{A}

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \nabla \left(\nabla \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \right) - \nabla^2 \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\nabla \int_{\mathcal{V}} \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' - \int_{\mathcal{V}} \mathbf{j}(\mathbf{r}') \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \right] . \end{aligned} \quad (10.14)$$

Utilizando as propriedades de $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (10.15)$$

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (10.16)$$

em substituição aos termos correspondentes em (10.14), obtemos

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int_{\mathcal{V}} \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) . \quad (10.17)$$

A seguir demonstramos que o primeiro termo à direita da igualdade em (10.17) deve se anular para uma distribuição de correntes localizadas. Para isso fazemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' &= \int_{\mathcal{V}} \nabla' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' - \int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\ &= \oint_{\mathcal{S}} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot \hat{n}' dS' - \int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' . \end{aligned} \quad (10.18)$$

Se as correntes (fontes do campo \mathbf{B}) são locais e decaem para zero no infinito, o primeiro termo à direita de (10.18) se anula. Além disso, para correntes estacionárias $\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0$ e o segundo termo também se anula. Portanto, ficamos com

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} . \quad (10.19)$$

Obtemos, então, as equações da magnetostática no vácuo

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{e} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

\Rightarrow **Espiras de Helmholtz:** dois condutores circulares, coaxiais e paralelos, de raio R , conduzem uma corrente I no mesmo sentido. A distância de separação entre as espiras é a .

Calculamos o campo \mathbf{B} produzido por cada espira ao longo de seu eixo. Para isso utilizamos a fórmula

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} . \quad (10.20)$$

Para a espira 1 temos: $\mathbf{r}' = R\hat{r} + (a/2)\hat{z}$ e $\mathbf{r} = z\hat{z}$. Portanto

$$\mathbf{B}_1(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_{\mathcal{C}} \frac{R d\vec{\varphi} \times [-R\hat{r} + (z - a/2)\hat{z}]}{[R^2 + (z - a)^2]^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2} I \left\{ \frac{R^2\hat{z} + R\left(z - \frac{a}{2}\right)\hat{r}}{[R^2 + (z - a)^2]^{3/2}} \right\} . \quad (10.21)$$

Para a espira 2 temos: $\mathbf{r}' = R\hat{r} - (a/2)\hat{z}$ e

$$\mathbf{B}_1(z) = \frac{\mu_0}{2} I \left\{ \frac{R^2\hat{z} + R\left(z + \frac{a}{2}\right)\hat{r}}{[R^2 + (z + a)^2]^{3/2}} \right\} . \quad (10.22)$$

Somando os campos, vemos que próximo à origem as componentes radial B_r se cancela, mas as componentes axial B_z se somam. Para a componente radial obtemos

$$B_r(z) = \left[\left(\frac{-32(a^2 - 2R^2)}{a^4(1 + (2R/a)^2)^{5/2}} \right) \frac{z}{a} + \mathcal{O}((z/a)^3) \right] \frac{\mu_0 IR}{2} . \quad (10.23)$$

Note que o primeiro termo se anula na origem (e para $a = \sqrt{2}R$).

Para a componente B_z , que é a mais importante, obtemos

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 IR^2}{2} \left\{ \frac{16}{(a^2 + 4R^2)^{3/2}} + \frac{384(a^2 - R^2)}{a^5(1 + (2R/a)^2)^{7/2}} \left(\frac{z}{a} \right)^2 + \mathcal{O}((z/a)^4) \right\} . \quad (10.24)$$

Para a geometria $R = a$ temos, em torno da origem (ponto equidistante entre as duas espiras)

$$B_z(z) = \frac{8\mu_0 I}{5^{3/2}R} + \mathcal{O}((z/a)^4) .$$

10.3 Potencial Vetor \mathbf{A}

A densidade de fluxo magnético \mathbf{B} e o potencial vetor \mathbf{A} estão relacionados pela fórmula $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, mas podemos alterar \mathbf{A} da seguinte maneira

$$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A} + \nabla\Psi ,$$

sem mudar o campo \mathbf{B} , pois $\nabla\Psi$ é irrotacional, $\nabla \times \nabla\Psi \equiv 0$. Portanto, a equação $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ determina o campo \mathbf{A} a menos de um campo vetorial irrotacional, $\nabla\Psi$. Assim, podemos escrever

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} . \quad (10.25)$$

Usando a liberdade de calibre que temos para definir o potencial vetor, $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\Psi$, podemos simplificar a Eq. (10.25) adotando $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ (calibre de Coulomb), para obter

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j} . \quad (10.26)$$

No sistema de coordenadas cartesiano, a equação vetorial (10.26) pode ser separada em 3 equações para as componentes $\alpha = x, y$ e z

$$\nabla^2 A_\alpha = -\mu_0 j_\alpha .$$

Note que a Eq. (10.26) é similar à equação para o potencial escalar elétrico

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} .$$

Podemos verificar que a definição do potencial vetor \mathbf{A} , segundo a Eq. (10.12), satisfaz naturalmente o Calibre de Coulomb, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Para isso fazemos

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \nabla^2 \Psi .$$

Utilizando a relação (10.15) e integrando por partes

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \nabla' \cdot \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \nabla^2 \Psi .$$

Aplicando o teorema da divergência e usando o fato de que $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ para correntes estacionárias, temos

$$\oint_S \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot \hat{n}' dS' = 0 \quad \text{e} \quad \int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = 0$$

Portanto, no calibre de Coulomb, ficamos com $\nabla^2 \Psi = 0$ em \mathcal{V} . Longe das fontes (supostas locais) devemos ter $\lim_{r \rightarrow \infty} \Psi = 0$, portanto, $\Psi = 0$ em \mathcal{V} . Então,

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' .$$

satisfaz automaticamente o calibre de Coulomb ($\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla^2 \Psi = 0$) e, sendo assim, é solução de $\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}$.

Para uma densidade linear de carga

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{I}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{l}' .$$

Para uma densidade superficial

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{K}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da' .$$

10.4 Campos Magnéticos na Matéria

Na matéria a densidade de corrente total é dividida em duas partes:

\mathbf{j}_{mac} = corrente macroscópica

\mathbf{j}_{mol} = corrente das órbitas eletrônicas em átomos e moléculas

As correntes \mathbf{j}_{mol} vão dar origem a momentos de dipólo magnéticos nas posições dos átomos e moléculas, \mathbf{m}_{mol} ou \mathbf{m}_i . Em geral, tanto \mathbf{j}_{mol} quanto \mathbf{m}_{mol} não são constantes no tempo, mas podemos definir a densidade de magnetização do material como a magnetização média por unidade de volume,

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = N \sum_i \langle \mathbf{m}_i \rangle , \quad (10.27)$$

onde N é a densidade volumétrica de moléculas. No limite de um meio contínuo, A magnetização resultante \mathbf{M} vai dar origem a um potencial vetor

$$\delta \mathbf{A}_{mol} = \left[\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] \Delta V' . \quad (10.28)$$

Portanto, levando em conta todas as contribuições temos

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] dV' \quad (10.29)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right] dV' \quad (10.30)$$

Podemos escrever ²

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] dV' = - \int_{\mathcal{V}} \nabla' \times \left[\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] dV' + \int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla' \times M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (10.31)$$

Em seguida, utilizando a relação de Stokes,

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \times \vec{v} dV = - \oint_S \vec{v} \times d\vec{a} = \oint_S \hat{n} \times \vec{v} da, \quad (10.32)$$

obtemos

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla' \times \left[\frac{M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] dV' = \oint_S \hat{n}' \times \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da'. \quad (10.33)$$

Agrupando os termos resultantes de (10.30) ficamos com

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') + \nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \hat{n}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da'. \quad (10.34)$$

Definimos as correntes de magnetização macroscópicas de volume e superficial, respectivamente, como

$$\mathbf{j}_M = \nabla \times \mathbf{M} \quad (10.35)$$

$$\kappa_M = \mathbf{M} \times \hat{n}, \quad (10.36)$$

tal que

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{j} + \mathbf{j}_M}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\kappa_M}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da'. \quad (10.37)$$

Generalizando a equação de Ampère para incluir as correntes de magnetização, campo magnético resultante no interior do material é

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{j} + \nabla \times \mathbf{M}) = \mu_0 \mathbf{j}_{eff} \quad (10.38)$$

Combinando os campos \mathbf{B} com \mathbf{M} no mesmo lado da equação, definimos o campo auxiliar \mathbf{H}

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} &= \mathbf{j} + \nabla \times \mathbf{M} \\ \nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) &= \mathbf{j} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{j}, \end{aligned} \quad (10.39)$$

tal que \mathbf{B} é denominado campo de indução magnética, \mathbf{M} é a magnetização.

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (10.40)$$

²Usando a identidade vetorial

$$\nabla \times (\varphi \mathbf{M}) = (\nabla \varphi) \times \mathbf{M} + \varphi (\nabla \times \mathbf{M}).$$

é denominado simplesmente campo magnético. Ele é resultado da indução magnética menos a magnetização. Então, as equações da magnetostática na matéria tornam-se

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} \quad (10.41)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (10.42)$$

com $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$.

A relação entre \mathbf{M} e \mathbf{H} deve ser determinada. Na maioria dos casos (materiais), temos simplesmente

$$\mathbf{M} = \mathcal{X}_m \mathbf{H} \quad , \quad \text{com } \mathcal{X}_m \text{ constante (tensor em sólidos)}$$

\mathcal{X}_m é a susceptibilidade magnética. De maneira que

$$\mathbf{B} = \mu_0 [\mathbf{H} + \mathbf{M}] = \mu_0 [1 + \mathcal{X}] \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad , \quad \mu = \mu_0 [1 + \mathcal{X}] \quad \text{é a permeabilidade magnética do material}$$

Dependendo do valor de μ , temos os seguintes tipos de materiais

$$\mu < 1 \quad , \quad \mathcal{X} < 0 \quad : \quad \text{diamagnetismo} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{B}| < |\mathbf{H}|$$

$$\mu > 1 \quad , \quad \mathcal{X} > 0 \quad : \quad \text{paramagnetismo} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{B}| > |\mathbf{H}|$$

$$\mu \gg 1 \quad , \quad \mu = \mu(H) \quad : \quad \text{ferromagnetismo} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{B}| \gg |\mathbf{H}|$$

Obs:

$$\begin{aligned} - \int_V \vec{\nabla} \times \left[\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] dV' &= - \oint_S \hat{n}' \times \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da' \\ &= \oint_S \times \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \hat{n}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da' \end{aligned}$$

definimos

$$\vec{K} = \mathbf{M} \times \hat{n}$$

a densidade superficial de corrente de magnetização, que aparece na superfície do material, ou no local onde há descontinuidade na magnetização.

Podemos escrever

$$\vec{K} = \mathbf{M} \times \hat{n} = \sigma \cdot \vec{v}$$

Exemplos: no sistema CGS \leftarrow \rightarrow mks

diamagnéticos	}	H ₂ :	$\mathcal{X}_m = -2,3 \times 10^{-9}$
		H ₂ O :	$\mathcal{X}_m = -1,2 \times 10^{-5}$
		N ₂ :	$\mathcal{X}_m = -0,7 \times 10^{-8}$
		Ag :	$\mathcal{X}_m = -2,5 \times 10^{-5}$
(T = 0°C)		Cu \rightarrow	$= -0,9 \times 10^{-5}$
<u>(materiais não magnéticos)</u>		Ge \rightarrow	$= -0,8 \times 10^{-5}$
		Si \rightarrow	$= -0,3 \times 10^{-5}$
	Bi \rightarrow	$= -18 \times 10^{-5}$	

paragmagnéticos	}	O ₂ :	$\mathcal{X}_m = 1,8 \times 10^{-8}$
		Pt :	$\mathcal{X}_m = 2,7 \times 10^{-5}$
		Al :	$\mathcal{X}_m = 2,1 \times 10^{-5}$
(T = 20°C)		CaO \rightarrow	$= 580 \times 10^{-5}$
		FeCl ₂ \rightarrow	$= 360 \times 10^{-5}$
		NiSO ₄ \rightarrow	$= 120 \times 10^{-5}$
		Pt \rightarrow	$= 26 \times 10^{-5}$

Ferrogmagnéticos	}	Fe :	$\mathcal{X}_m \approx 10^6$
		Co :	$\mathcal{X}_m \approx 10^6$
		Ni :	$\mathcal{X}_m \approx 10^6$
		Fe \rightarrow	1000
		FeCl ₂ \rightarrow	240
		NiSO ₄ \rightarrow	150

Paramagnetismo:

\rightarrow materiais com momento magnético \mathbf{m}

\rightarrow geralmente não há saturação de \mathbf{M} (limite clássico Langevin, $H \ll T$)

$\rightarrow \mathcal{X}_m \propto \frac{1}{T}$ (Lei de Curie)

Figura 1.....

Diamagnetismo

- \mathbf{M} oposto a \mathbf{H} : $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$, com $\chi_m < 0$
- princípio de Lenz: correntes no material compensam variação de \mathbf{H} .
- ocorre em materiais sem \mathbf{m} .
- supercondutores são diamagnéticos perfeitos.
- todos os materiais apresentam diamagnetismo.

Ferromagnetismo

- $\mu = \mu(H)$
- resposta não linear da magnetização: $\mathbf{M} = \mu(H) \mathbf{H}$
- M pode ter mais que um valor para o mesmo H : depende da história (processo) ⇒ histerese

→ M depende de H mas também do próprio M
 Figura 2.....

$M_R = M(h = 0)$ é a magnetização remanescente

$H_C \Rightarrow M(H_C) = 0$ é o campo coercivo

→ modelo mais simples: Modelo de Curie

→ T_C é a temperatura crítica.

Figura 3.....

Comparando as condições de contorno para os campos estáticos

$$\left. \begin{aligned} (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{n} &= \sigma \\ (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \hat{n} &= 0 \end{aligned} \right| \begin{aligned} \hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) &= 0 \\ \hat{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) &= \vec{K} \end{aligned}$$

onde:

σ é a densidade superficial de carga

\vec{K} é a densidade superficial de corrente (com componentes paralelas a superfície em todos os pontos).

Condições de Contorno para \mathbf{B} e \mathbf{H}

Na superfície S entre os meios μ_1 e μ_2
 Figura 4.....

$$B_2^\perp = B_1^\perp$$

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} dV = \oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{n} da = 0 \implies (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \hat{n}_{1 \rightarrow 2} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{H} = \mathbf{j}$$

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \mathbf{H}) \hat{n} da = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\vec{l} = \underbrace{\int \mathbf{j} \hat{n} da}_{\text{corrente de superfície}} = \int \vec{K} d\vec{l}$$

$$\hat{n}_{1 \rightarrow 2} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \vec{K} \quad , \quad \vec{K} \text{ densidade de corrente de superfície}$$

Se $\vec{K} = 0$ temos

$$(H_1)^{tan} = (H_2)^{tan}$$

por exemplo, no caso de um solenóide
 Figura 5.....

Se $\vec{K} \neq 0$ temos

$$\hat{n}_{1 \rightarrow 2} \times (H_2 - H_1) = \vec{K}$$

Em supercondutores $\mathbf{H} = 0$, portanto o campo externo é cancelado (blindado) pelas correntes de superfície.

Esquemáticamente temos
 Figura 6.....

Da condição $B_2^\perp = B_1^\perp$ (componente normal de \mathbf{B} é sempre contínua), derivamos

$$\mu_2 H_2^\perp = \mu_1 H_1^\perp \implies H_2^\perp = \frac{\mu_1}{\mu_2} H_1^\perp \quad , \quad \text{pois } \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

Também podemos escrever $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$ e obter

$$(\mathbf{H}_1 + \mathbf{M}_1) \cdot \hat{n} = (\mathbf{H}_2 + \mathbf{M}_2) \cdot \hat{n}$$

mas $\mathbf{M} \cdot \hat{n} = \sigma_M$ é a densidade superficial de carga magnética. Portanto Figura 7.....

$$H_1^\perp + \sigma_{M1} = H_2^\perp + \sigma_{M2}$$

$$H_2^\perp - H_1^\perp = (\sigma_{M1} - \sigma_{M2}) = \Delta \sigma_M \quad \text{na interface}$$

ou seja, o campo \mathbf{H} não é contínuo na interface, se \mathbf{M} não for contínua.

Potencial Magnético Escalar Figura 8.....

Se $\mathbf{j} = 0$ temos $\vec{\nabla} \times \mathbf{H} = 0$ (localmente)

Usando a identidade $\text{rot.grad}=0$, podemos escrever

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{H} = \vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla} \phi_M) = 0$$

com $\mathbf{H} = -\vec{\nabla} \phi_M$, ϕ_M é o potencial magnético escalar.

Da outra equação: $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$, temos dois caminhos para seguir:

→ a) meios (materiais) lineares: $\begin{matrix} \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \end{matrix}$ com μ independente de \mathbf{H} e constante por partes.

Nesse caso $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = \vec{\nabla} \cdot (\mu \mathbf{H}) = \mu \cdot \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} \phi_M) = 0$

$$\nabla^2 \phi_M = 0 \quad \text{para uma região onde } \mathbf{j} = 0$$

→ b) meios (materiais) não lineares:

Nesse caso $\mathbf{B} = \mu(\mathbf{H}) \cdot \mathbf{H} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$

Temos então

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = \vec{\nabla} \cdot [\mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})] = \vec{\nabla} \cdot [\mu_0 (-\vec{\nabla} \phi_M + \mathbf{M})] = 0$$

$$-\nabla^2 \phi_M + \vec{\nabla} \cdot \mathbf{M} = 0$$

$$\nabla^2 \phi_M = +\vec{\nabla} \cdot \mathbf{M} = -\rho_M \quad , \quad \text{com } \rho_M = -\vec{\nabla} \cdot \mathbf{M}$$

$\nabla^2 \phi_M = -\rho_M$, ρ_M é a carga magnética que representa a origem do campo magnético \mathbf{H}

Figura 9.....

magnetização não homogênea $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{M} \neq 0$ equivale a única densidade de monopólo magnético.

Obs: no caso do material ser linear

$$\rho_M = -\vec{\nabla} \cdot \mathbf{M} = -\vec{\nabla} \cdot (\mathcal{X}_m \mathbf{H}) = \mathcal{X}_m \nabla^2 \phi_M$$

Então $\nabla^2 \phi_M = -\rho_M$

$$\nabla^2 \phi_M = -\mathcal{X}_m \nabla^2 \phi_M \Rightarrow \nabla^2 \phi_M = 0$$

Tendo definido a carga magnética ρ_M , o potencial 4π no espaço linear pode ser escrito (livre de correntes)

$$\phi_M(\mathbf{r}) = \frac{-1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\nabla}' M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \frac{+1}{4\pi} \int_V \frac{\rho_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

com

$$\nabla^2 \phi_M(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \rho_M(\mathbf{r}') \nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' = \frac{1}{4\pi} \int_V \rho_M(\mathbf{r}') \cdot [-4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] dV'$$

$$\nabla^2 \phi_M = -\rho_M(\mathbf{r})$$

Se a magnetização está localizada no espaço, a integração por partes resulta em

$$\begin{aligned} \phi_M(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' \\ &= \frac{-1}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \int_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \end{aligned}$$

($\vec{\nabla}$ operando nas coordenadas do campo)

O campo ϕ_M , visto à distância da região magnetizada, pode ser obtido após uma expansão de $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ em torno da origem

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \dots$$

Levando em conta apenas o 1º termo da expansão

$$\begin{aligned} \phi_M(\mathbf{r}) &\simeq \frac{-1}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \int_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{r} dV' \\ &\simeq \frac{-1}{4} \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) \int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}') dV' \end{aligned}$$

$$\phi_M(\mathbf{r}) \simeq \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3} \quad , \quad \text{com} \quad \mathbf{m} = \int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}') dV' \quad \text{sendo a magnetização total do corpo.}$$

$$\phi_p(\mathbf{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

Na superfície do corpo podemos definir uma densidade superficial de magnetização.

$$\sigma_M = \mathbf{M} \cdot \hat{n}$$

Figura 10.....

Portanto, o potencial escalar magnético será dado por

$$\begin{aligned} \phi_M &= \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\rho_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\sigma_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' \\ &= \frac{-1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\nabla}' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \hat{n}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' \end{aligned}$$

Potencial Vetor Figura 11.....

Temos para o potencial vetor em um meio magnético

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{j} = \mu_0 \mathbf{j}_{efs} \quad , \quad \vec{\nabla} \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

ou

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}_{efs}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad , \quad \mathbf{j}_{efs} = \mathbf{j} + \vec{\nabla} \times \mathbf{M}$$

Se $\mathbf{j} = 0$ e não há superfícies de fronteira

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}_M}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\nabla}' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

se \mathbf{M} for constante no espaço $\mathbf{A} = 0$.

Se há superfícies de fronteira, é possível definir correntes de magnetização superficiais $\mathbf{M} \times \hat{n}$ tal que, incorporando o termo de superfície obtemos

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\nabla}' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \hat{n}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS'$$

Se $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ for constante no material ficamos apenas com o termo de superfície

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \hat{n}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

Campo (Fator) Desmagnetizante

Consideremos um material magnetizado. Por simplicidade, assumimos que a magnetização é constante (isso só se verifica em corpos elipsoidais). O problema fica mais claro se imaginarmos uma esfera, nesse caso

Figura 12.....

$$\phi_M = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\sigma_M}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS'$$

com $\sigma_M = \mathbf{M} \cdot \hat{n}$, densidade superficial de carga magnética.

O campo \mathbf{H} gerado por essa densidade superficial de carga magnética será

Figura 13.....

Figura 14.....

Note que:

- a) \mathbf{H} é antiparalelo a \mathbf{M} dentro do material, com $\mathbf{B} = \mu_0 [\mathbf{H} + \mathbf{M}]$
- b) o campo produzido por σ_M é chamado campo fator desmagnetizante.
- c) para elipsoides $\mathbf{H}_{desm} = N \mathbf{M}$, onde N é o fator desmagnetizante.

N não depende do material para elipsóides, somente da geometria.

Para um corpo de geometria arbitrária, N é um tensor (que pode depender da permabilidade do material)

- d) \mathbf{H}_{desm} é descontínuo na superfície, por causa de σ_M

→ e) se existe um campo externo, então \mathbf{H} dentro do corpo será

$$H_{in} = H_0 - N M \quad \implies \quad \underline{\underline{H_{in} < H_0}}$$

Problemas de Magnetostática

Metódos de Solução

Os problemas são, em geral, mais complicados do que os de eletrostática, por causa das relações vetoriais.

→ Método Geral

Se a corrente de cargas livres é conhecida, podemos resolver a equação de Poisson para \mathbf{A} e \mathbf{j} .

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{H} = \mathbf{j} \quad , \quad \text{com } \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

tal que a equação de Ampère fica

$$\vec{\nabla} \times \left[\frac{1}{\mu} \cdot \mathbf{B} \right] = \vec{\nabla} \times \left[\frac{1}{\mu} \cdot \vec{\nabla} \times \mathbf{A} \right] = \mathbf{j}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \mathbf{A}) = \mu \mathbf{j} \quad , \quad \text{para } \mu \text{ homogêneo num dado material}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{j}$$

Fazendo $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A} = 0$, obtemos $\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{j}$

É necessário aplicar condição de contorno na interface de dois meios distintos.

A solução deve satisfazer $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A} = 0$.

→ Potencial Magnético Escalar (ϕ_M):

Se $\mathbf{j} = 0$ temos $\vec{\nabla} \times \mathbf{H} = 0$. De acordo com a identidade vetorial $rot. \ grad \equiv 0$, podemos escrever

$$\vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla} \phi_M) = 0 \quad \implies \quad \mathbf{H} = -\vec{\nabla} \phi_M$$

onde ϕ_M é o potencial magnético escalar.

Mas, temos ainda

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = \vec{\nabla} \cdot (\mu \mathbf{H}) = \vec{\nabla} \cdot (\mu \cdot \vec{\nabla} \phi_M) = 0$$

$$\nabla^2 \phi_M = 0 \quad \text{se } \mu \text{ for } \underline{\text{constante no material}}$$

Condições de contorno devem ser aplicadas nas interfaces.

Exemplo: Esfera uniformemente magnetizada (raio a)

$$\mathbf{M} = M_0 \hat{z}$$

Figura 15.....

magnetização \mathbf{M} constante e permanente (gerando \mathbf{B} e \mathbf{M})

Devido a simetria azimutal do problema, para $r > a$ temos

$$\nabla^2 \phi_M = 0 \quad \implies \quad \phi_M = \sum_l A_l \frac{1}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta)$$

Dentro da esfera

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad \text{com} \quad \begin{cases} \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \text{ , } \chi_m \text{ escalar} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \text{ , } \mathbf{B} \parallel \mathbf{H} \end{cases}$$

Aplicando as condições de contorno

$$(H_1)^{\text{tan}} = (H_2)^{\text{tan}}$$

fora da esfera $\mathbf{H}_2 = -\vec{\nabla} \phi_M$, portanto

$$(H_2)^{\text{tan}} = \frac{-1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \phi_M$$

dentro da esfera $\mathbf{H}_1 = \frac{1}{\chi_m} \mathbf{M} = \frac{M_0}{\chi_m} \hat{z}$, portanto

$$(H_1)^{\text{tan}} = \frac{M_0}{\chi_m} (-\sin \theta)$$

Então

$$(H_1)^{\tan} = (H_2)^{\tan}$$

$$\frac{M_0}{\chi_m} (-\sin \theta) = \frac{-1}{a} \sum_l A_l \frac{1}{a^{l+1}} P'_l(\cos \theta)$$

Esta equação só pode ser satisfeita para $l = 1$

$$\frac{M_0}{\chi_m} (-\sin \theta) = \frac{-1}{a^3} A_1 (-\sin \theta)$$

$$A_1 = \frac{-M_0 a^3}{\chi_m}$$

Para o campo \mathbf{B} temos

$$(B_1)^\perp = (B_2)^\perp \quad \left(\vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0 \right)$$

fora da esfera

$$\mathbf{B}_2 = \mu_0 \mathbf{H}_2 \Rightarrow (B_2)^\perp = -\mu_0 \left. \frac{\partial}{\partial r} \phi_M \right|_{r=a}$$

dentro da esfera

$$\mathbf{B}_1 = \mu_0 [\mathbf{H}_1 + \mathbf{M}] = \mu_0 \left[\frac{\mathbf{M}}{\chi_m} + \mathbf{M} \right]$$

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0}{\chi_m} [1 + \chi_m] \mathbf{M} \Rightarrow (B_1)^\perp = \frac{\mu_0}{\chi_m} [1 + \chi_m] \cdot M_0 \cos \theta$$

Para a componente $l = 1$

$$\frac{\mu_0}{\chi_m} [1 + \chi_m] M_0 \cos \theta = -\mu_0 A_1 \left[\frac{-(l+1)}{a^{l+2}} \right] \cos \theta \quad , \quad l = 1$$

$$= +\mu_0 A_1 \frac{2}{a^3} \cos \theta$$

$$A_1 = \frac{+1}{\chi_m} [1 + \chi_m] M_0 \frac{a^3}{2}$$

Resolvendo para \mathcal{X}_m

$$\frac{-M_0 a^3}{\mathcal{X}_m} = \frac{+1}{\mathcal{X}_m} = \frac{+1}{\mathcal{X}_m} [1 + \mathcal{X}_m] \frac{M_0 a^3}{2} \implies \mathcal{X}_m = -3$$

$A_1 = -3M_0 a^3$, tal que

$$\phi_M = -\frac{M_0}{3} \frac{a^3}{r^2} \cos \theta \quad \mathbf{M} = \mathcal{X}_m \mathbf{H}_1 \implies \mathbf{H}_1 = -\frac{\mathbf{M}}{3}$$

$$\mathbf{B}_1 = \mu \mathbf{H} = \mu_0 [1 + \mathcal{X}_m] \mathbf{H}_1$$

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0}{3} 2 \mathbf{M}$$

A magnetização total da esfera é

$$\mathbf{m} = \int \mathbf{M}(\mathbf{r}') dV' = \frac{4}{3} \pi a^3 \mathbf{M}$$

Portanto,

$$\phi_M = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{4\pi}{3} a^3 \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

$$\phi_M = \frac{M_0 a^3 \cos \theta}{3r^2}$$

Figura 16.....

Figura 17.....

Exemplo: Consideramos, agora, que a mesma esfera do exemplo anterior não tem magnetização permanente, mas que sua magnetização só existe na presença de um campo externo.

—> esfera paramagnética

Pelo princípio da superposição para os campos, dentro da esfera os campos devem ser

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B}_{in} &= \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_M = \mathbf{B}_0 + \frac{2}{3} \mu_0 \mathbf{M} \\ \mathbf{H}_{in} &= \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_M = H_0 - \frac{1}{3} \mathbf{M} \end{aligned} \right\} \text{com } \mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}_0$$

A relação de superposição pode ser escrita por meio de outra fórmula

$$\mathbf{B}_{in} = \mu \mathbf{H}_{in} \quad , \quad \text{para } \mu \text{ constante}$$

Portanto, igualando

$$\mathbf{B}_0 + \frac{2}{3} \mu_0 \mathbf{M} = \mu \mathbf{H}_{in} = \mu \left[\mathbf{H}_0 - \frac{1}{3} \mathbf{M} \right]$$

obtemos

$$\mathbf{M} = \frac{3}{\mu_0} \left(\frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} \right) \mathbf{B}_0$$

note que $\mathbf{M}(\mathbf{B}_0) = \mathbf{M}(\mathbf{H}_0) = 0$, pois o material é magnético.

Exemplo: blindagem magnética

Consideremos uma casca esférica, feita de material com permeabilidade μ
 Figura 18.....

Sem a casca esférica temos

$$\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}_0$$

por causa do campo externo.

Não há correntes: $\mathbf{j} = 0$, portanto $\mathbf{H} = -\vec{\nabla}\phi_M$ e $\nabla^2\phi_M = -\rho_M$ para cada região do espaço.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \phi_M = \sum_l \alpha_l \frac{1}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) - H_0 r \cos \theta & , \quad r > b \\ \phi_M = \sum_l (B_l r^l + \gamma_l \frac{1}{r^{l+1}}) P_l(\cos \theta) & , \quad a < r < b \\ \phi_M = \sum_l \delta_l r^l P_l(\cos \theta) & , \quad r < a \end{array} \right.$$

Aplicando as condições de contorno em $r = a$ e $r = b$:

$$(B_1^\perp) = (B_2^\perp) \quad \text{e} \quad (H_1)^{\tan} = (H_2)^{\tan}$$

obtemos o seguinte sistema de equações para os coeficientes α , β , γ e δ

Somente os coeficientes com $l = 1$ são diferentes de zero

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 - b^3 \beta_1 - \gamma_1 = b^3 H_0 \\ 2\alpha_1 + \mu' b^3 \beta_1 - 2\mu' \gamma_1 = -b^3 H_0 \\ a^3 \beta_1 + \gamma_1 - a^3 \delta_1 = 0 \\ \mu' a^3 \beta_1 - 2\mu' \gamma_1 - a^3 \delta_1 = 0 \end{array} \right.$$

com $\mu' = \frac{\mu}{\mu_0}$

Os coeficientes mais interessantes são α e δ , que determinam o campo \mathbf{H} fora e dentro da esfera.

$$\alpha_1 = \left[\frac{(2\mu' + 1)(\mu' - 1)}{(2\mu' + 1)(\mu' + 2) - 2 \left(\frac{a}{b}\right)^3 (\mu' - 1)^2} \right] (b^3 - a^3) H_0$$

$$\delta_1 = - \left[\frac{q\mu'}{(2\mu' + 1)(\mu' + 2) - 2 \left(\frac{a}{b}\right)^3 (\mu' - 1)^2} \right] H_0$$

Para $\mu \gg \mu_0$, $\frac{\mu}{\mu_0} \sim 10^3 - 10^6$ (um ferromagneto) temos

$$\alpha_1 \rightarrow b^3 H_0$$

$$-\delta_1 \rightarrow \frac{q\mu_0}{2\mu \left(1 - \frac{a^3}{b^3}\right)} H_0 \implies \underline{\underline{\delta_1 \propto \mu^{-1}}}$$

Capítulo 11

Magnetismo

O magnetismo, denominação da fenomenologia que descreve o comportamento dos materiais magnéticos, está fundamentalmente relacionado às propriedades microscópicas da matéria, portanto fazemos a seguir uma breve revisão da física atômica. **Neste capítulo vamos usar, por conveniência, o sistema de unidades gaussiano (CGS).**

11.1 Revisão de Física Atômica

O momento magnético orbital do elétron é (sistema CGS)

$$\vec{\mu} = \frac{-e}{2mc} \mathbf{L} \quad (11.1)$$

onde e é a carga fundamental, m_e a massa de repouso do elétron e \mathbf{L} seu momento angular. Introduzindo os números quânticos orbitais de um elétron ligado ao núcleo.

- n : número quântico principal

$$n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

camadas: K, L, M, N, \dots

- l : momento angular

$$l = 0, 1, 2, 3, 4, \dots, (n - 1)$$

$$s, p, d, f, g, \dots$$

momento angular total

$$L = \hbar \sqrt{l(l + 1)}$$

- m_l : projeção do momento angular

$$m_l : -l, -l + 1, \dots, 0, \dots, l - 1, l$$

$$L_z = m_l \hbar$$

A quantidade $\mu_B = \frac{e\hbar}{2mc} = 0,927 \cdot 10^{-20} \text{ erg/Oest}$ é o **magneton de Bohr**.

O spin do elétron é $S = \frac{1}{2}\hbar$, com $m_s = \pm \frac{1}{2}$. O momento magnético de spin será

$$\mu_s = -g_s \frac{e}{2mc} \frac{\hbar}{2}$$

onde g_s é o fator giromagnético do spin e $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$ é a constante de estrutura fina(cgs). Para o spin eletrônico $g_s = 2(1 + \frac{\alpha}{2\pi} - 0,328(\frac{\alpha}{2\pi})^2 + \dots) \approx 2.0023$.

O momento angular total é dado por $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ e o número quântico J pode variar no intervalo

$$|L - S| \leq J \leq L + S$$

com m_j definido analogamente a m_l e m_s . Dois fatores são importantes para determinar o momento angular eletrônico total J.

1. **interação Coulombiana:** os momentos angulares L_i dos elétrons tendem a acoplar-se, $\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i$, para minimizar a interação Coulombiana, como ilustra a Figure 11.1. Esse mecanismo favorece estados tripletos que maximizam S.

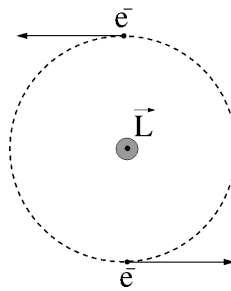


Figura 11.1: xxx

2. **interação spin-Órbita:** interação magnética que acopla o momento angular de spin de cada elétron com o seu próprio momento angular. Por exemplo

elemento	3Li	${}^{11}Na$	${}^{19}K$	${}^{37}Rb$	${}^{55}Cs$
subcamada	2p	3p	4p	5p	6p
$\Delta E_{so}(eV)$	$0,42 \cdot 10^{-4}$	$21 \cdot 10^{-4}$	$72 \cdot 10^{-4}$	$295 \cdot 10^{-4}$	$687 \cdot 10^{-4}$

Nos elementos com Z pequeno ou moderado, temos

$$\Delta E_{SO} \ll \Delta E_{Coul} ,$$

portanto, nesse caso, os mecanismos podem ser desacoplados e tratados independentemente: primeiro ΔE_{Coul} , depois Δ_{SO} . Assim, primeiramente são definidos

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i \quad \text{e} \quad \mathbf{S} = \sum_i \mathbf{S}_i$$

para cada átomo e posteriormente $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$. Nesse caso, temos os números quânticos $\{J, M_j, L, S\}$ bem definidos (constantes). Essa forma de acoplamento é chamada acoplamento LS (ou Russel-Sanders¹)

Para átomos com Z grande

$$\Delta E_{SO} \sim \Delta E_{Coul}$$

e os mecanismos não podem ser separados.

¹Russel e Sanders são astrônomos.

Para átomos com Z muito grande

$$\Delta E_{SO} \gg \Delta E_{Coul} .$$

Nesse caso o elétron acopla seu momento angular \mathbf{L}_i com \mathbf{S}_i para formar $\mathbf{J}_i = \mathbf{L}_i + \mathbf{S}_i$ constante e então formar $\mathbf{J} = \sum_i \mathbf{J}_i$. Tal mecanismo de acoplamento é conhecido por acoplamento JJ.

Levando-se e, conta o acoplamento de \mathbf{L} e \mathbf{S} pelo mecanismo de Russel-Sanders, temos para o momento magnético do átomo

$$\mu = -g_e \mu_B \mathbf{L} - g_s \mu_B \mathbf{S}$$

$$\mu = -\mu_B [\mathbf{L} + 2\mathbf{S}]$$

fazendo $g_l = 1$ e $g_s = 2$, com $L = \sqrt{l(l+1)}$, $S = \sqrt{s(s+1)}$ e $\mu_B = \frac{e\hbar}{2mc}$. Note que $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$.

A energia de interação de um momento magnético atômico (devido ao elétron) com o campo \mathbf{B} é

$$\Delta E = -\mu_B [\mathbf{L} + 2\mathbf{S}] \cdot \mathbf{B}$$

que podem ser escrito em termos dos números quânticos na forma

$$\Delta E = g_L \mu_B m_j B$$

com

$$g_L = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$

fator de Landé. vemos que g_L será diferente para os vários níveis. Para determinar g_L , projetamos \mathbf{L} , \mathbf{S} e \mathbf{B} na direção de \mathbf{J}

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{e\hbar}{2mc} (\mathbf{L} + 2\mathbf{S}) \cdot \mathbf{B} = \frac{e\hbar}{2mc} \frac{(\mathbf{L} + 2\mathbf{S}) \cdot \mathbf{J}}{J} \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{B}}{J} \\ &= \frac{e\hbar}{2mc} \frac{(\mathbf{L} + 2\mathbf{S}) \cdot (\mathbf{L} + \mathbf{S}) J_z}{J^2} B , \end{aligned}$$

pois no mecanismo LS \mathbf{L} e \mathbf{S} precisam em torno de \mathbf{J}

Regra de Hund

Assumindo o acoplamento de Russel-Sanders é possível determinar o estado eletrônico do átomo a partir do número de elétrons de valência. Segundo este conjunto de regras, o estado fundamental do átomo é determinado da seguinte maneira

1. os spins eletrônicos se somam para produzir S máximo;
2. os orbitais atômicos se combinam para produzir L máximo (elétrons orbitando na mesma direção permanecem mais distantes em média);
3. para camadas incompletas temos

$$J = L - S, \text{ para menos da metade ocupada}$$

$J = L + S$, para mais da metade ocupada .

Isso ocorre por causa da interação spin-órbita

$$\Delta E_{SO} = \frac{1}{2m^2c^2} \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} ,$$

pois o produto escalar $\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}$ é negativo se \mathbf{S} e \mathbf{L} são antiparalelos $\rightarrow J = L - S$. Como os coeficiente de ΔE_{SO} é positivo, a menor energia ocorre para $\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}$ mínimo.

Por exemplo, para o íon Cr^{+2} : $1s^2, 2s^2, 2p^2, 2p^6, 3s^2, 3p^6, 3d^4$

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{array} \right\} S = 2, L = 2 \quad J = L - S = 0$$

Momento magnético Nuclear:

$$\mu_N \frac{e\hbar}{2m_{NC}} = 5.05 \cdot 10^{-24} \frac{erg}{Oest}$$

No caso nuclear ΔE_{SO} é bem mais forte e importante.

11.2 Algumas definições

De acordo com a susceptibilidade magnética, χ_{mag} , podemos classificar o comportamento magnético dos materiais em 3 grupos

- diamagnetismo: $\chi_{mag} < 0, \mu < 1 \Rightarrow |\mathbf{B}| \lesssim |\mathbf{H}|$
- paramagnetismo: $\chi_{mag} > 0, \mu > 1 \Rightarrow |\mathbf{B}| \gtrsim |\mathbf{H}|$
- ferromagnetismo: $\chi_{mag} \gg 0, \mu \gg 1 \Rightarrow |\mathbf{B}| \gg |\mathbf{H}|$

Algumas definições ($\chi_{mag} \equiv \chi$). No vácuo temos

- CGS:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{H} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M} = \mu\mathbf{H} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{H} + 4\pi\chi\mathbf{H} = (1 + 4\pi\chi)\mathbf{H} \\ \mu &= 1 + 4\pi\chi \end{aligned}$$

- MKS:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu_0\mathbf{H} \\ \mathbf{B} &= \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \\ \mathbf{B} &= \mu_0(1 + \chi)\mathbf{H} = \mu\mathbf{H} \\ \frac{\mu}{\mu_0} &= 1 + \chi \end{aligned} \tag{11.2}$$

com $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$. Para a magnetização temos $\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}$ (CGS, MKS).

11.3 Teoria Quântica para o Paramagnetismo

11.3.1 Dielétricos

Consideremos um meio contendo N momentos magnéticos localizados por unidade de volume, não interagentes entre si. Da física atômica, os valores possíveis do momento magnético na direção do campo magnético \mathbf{B} , para cada átomo, são

$$\mu = -g_L \mu_B m_j, \quad (11.3)$$

com $-J \leq m_j \leq J$, sendo que g_L é o fator de Landé e $\mu_B = e\hbar/(2mc)$ é o magneton de Bohr. Note que a carga do elétron é $-e$, portanto temos o sinal negativo em (11.3). A energia potencial do momento magnético na presença do campo \mathbf{B} é

$$U = -\vec{\mu} \cdot \mathbf{B} \Rightarrow \begin{cases} U_{max} = g_L \mu_B J B & \Rightarrow \vec{\mu} \text{ e } \mathbf{B} \text{ antiparalelos} \\ U_{min} = -g_L \mu_B J B & \Rightarrow \vec{\mu} \text{ e } \mathbf{B} \text{ paralelos} \end{cases}$$

A magnetização macroscópica é descrita como a média estatística do momento de dipolo atômico, multiplicada pela densidade volumétrica de momentos dipolares

$$M = N \frac{\sum_{-J}^J (-g_L \mu_B m_j) \exp \left[\frac{g_L \mu_B m_j B}{k_B T} \right]}{\sum_{-J}^J \exp \left[\frac{g_L \mu_B m_j B}{k_B T} \right]}. \quad (11.4)$$

Para simplificar a notação definimos

$$\Omega = \frac{g_L \mu_B B}{k_B T},$$

e reescrevemos a Eq. (11.4) como

$$M = N \frac{\sum_{-J}^J (-g_L \mu_B m_j) e^{\Omega m_j}}{\sum_{-J}^J e^{\Omega m_j}}, \quad (11.5)$$

sendo $Z \equiv \sum_{m_j=-J}^J e^{\Omega m_j}$ a função de partição, que se calcula da seguinte maneira.

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{m_j=-J}^J e^{\Omega m_j} = e^{\Omega(-J)} + e^{\Omega(-J+1)} + \dots + e^{\Omega(J-1)} + e^{\Omega J} \\ &= e^{-\Omega J} [1 + e^{\Omega} + e^{2\Omega} + \dots + e^{2J\Omega}]. \end{aligned}$$

Esta é uma série geométrica da forma

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^n = a \frac{(1 - r^{n+1})}{1 - r},$$

com $a = 1$, $r = e^{\Omega}$ e $n = 2J$. Portanto

$$Z = e^{-\Omega J} \frac{1 - e^{(2J+1)\Omega}}{1 - e^{\Omega}} = \frac{\sinh \left[\Omega \left(J + \frac{1}{2} \right) \right]}{\sinh \left[\frac{\Omega}{2} \right]}.$$

De volta à Eq. (11.5), a magnetização é obtida se fazemos

$$M = N \frac{\sum (-g_L \mu_B m_j) e^{\Omega m_j}}{\sum e^{\Omega m_j}} = -\frac{N g_L \mu_B}{Z} \sum_{m_j} m_j e^{\Omega m_j} \quad (11.6)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{N g_L \mu_B}{Z} \frac{\partial}{\partial \Omega} \sum_{m_j} e^{\Omega m_j} = -N g_L \mu_B \frac{\partial}{\partial \Omega} \ln Z \\ &= -N g_L \mu_B J B_J(\Omega) , \end{aligned} \quad (11.7)$$

onde $B_J(\Omega)$ é a função de Brillouin

$$B_J(\Omega) = \frac{1}{J} \frac{\partial \ln Z}{\partial \Omega} = \left(1 + \frac{1}{2J}\right) \coth \left[\Omega \left(J + \frac{1}{2}\right) \right] - \frac{1}{2J} \coth \left(\frac{\Omega}{2}\right) J . \quad (11.8)$$

Note que obtivemos a magnetização em termos da função de Brillouin, pois a função de partição foi calculada a partir da soma de valores inteiros para m_j , como é próprio para o caso quântico. No entanto, se estivessemos no regime clássico e m_j pudesse ser descrito por uma variável real (contínua) a magnetização seria expressa em termos da função de Langevin. É possível verificar por meio de experimentos que apenas a função de Brillouin é capaz de descrever a magnetização para qualquer valor de Ω , como se vê na Figura 11.2.

A susceptibilidade magnética χ é definida de modo geral como

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial H} .$$

Entretanto, no regime linear de M podemos escrever $\chi = \frac{M}{H}$, de maneira que

$$\chi = \frac{M}{H} = -\frac{N g_L \mu_B J B_J(\Omega)}{H} .$$

Limites Assintóticos:

Para altos campos e/ou baixas temperaturas temos $g_L \mu_B B \gg k_B T$, $\Omega \gg 1$, que resulta em saturação magnética pois $\lim_{\Omega \rightarrow \infty} B_J(\Omega) = 1$. Todos os momentos estão alinhados e a magnetização é máxima, $M = N g_L \mu_B J$.

Para altas temperaturas e/ou baixos campos temos $g_L \mu_B B \ll k_B T$, $\Omega \ll 1$, o **regime clássico**, em que

$$\coth(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \dots$$

e

$$B_J(\Omega) \approx \frac{1}{3}(J+1)\Omega + \mathcal{O}(\Omega^3) .$$

Então

$$M = -N g_L \mu_B J \frac{1}{3}(J+1)\Omega = -\frac{N g_L^2 \mu_B^2 B}{3k_B T} J(J+1) . \quad (11.9)$$

Portanto $M \sim T^{-1}$ e a susceptibilidade $\chi = \frac{M}{H} \approx \frac{M}{B}$ torna-se

$$\chi = -N \frac{g_L^2 \mu_B^2 J(J+1)}{3k_B T} = \frac{C_{Curie}}{T} ,$$

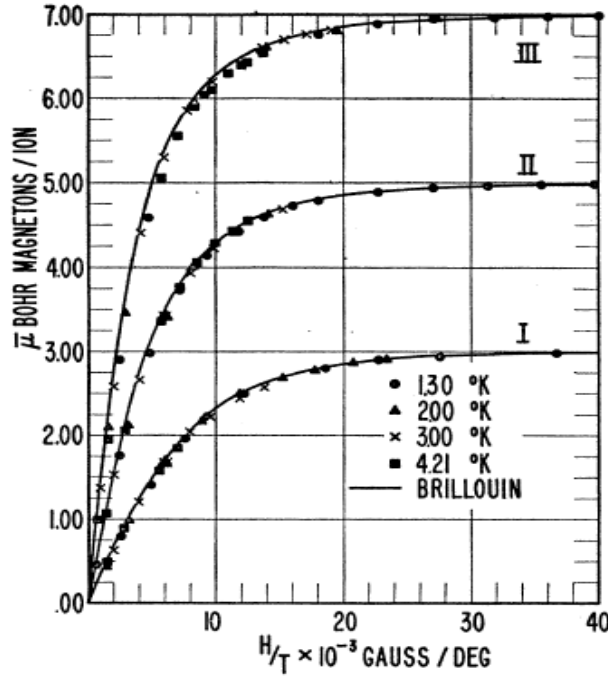


Figura 11.2: Processo de saturação da magnetização em um dielétrico paramagnético, que acompanha a curva de Brillouin. As curvas I,II e III se referem a sais paramagnéticos contendo os íons Cr^{3+} , Fe^{3+} e Gd^{3+} , para os quais $g=2$ e $J=3/2$, $5/2$ e $7/2$, respectivamente. *Phys. Rev.* **88**, 559 (1952)

com $C_{Curie} = -\frac{Np^2\mu_B^2}{3k_B}$ e $p = g_L[J(J+1)]^{1/2}$ é o número efetivo de magnetons de Bohr. Levamos em conta que $\mathbf{B} = [\mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}] = [1 + 4\pi\chi]\mathbf{H} \approx \mathbf{H}$, pois $\chi \approx 10^{-4}$ (CGS). O comportamento acima está em acordo com a teoria de Langevin e com a Lei de Curie para a susceptibilidade: $\chi = \frac{C}{T}$.

11.3.2 Metais

Nos dielétricos $M \sim T^{-1}$ ($\chi \sim T^{-1}$) a altas temperaturas. Entretanto, nos metais não magnéticos a magnetização é independente da temperatura. Pauli mostrou (~ 1927) que a estatística de Fermi-Dirac explica o fato de a maioria dos metais apresentar pequena susceptibilidade paramagnética, quase independente da temperatura. ²

Consideremos um gás de elétrons degenerado, tal que $\mu \gg k_B T$. Dividimos a banda semi-completa do metal em duas partes, de acordo com o spin dos elétrons, como mostra a Figura 11.3. Sem campo magnético temos

$$N_{\uparrow} = N_{\downarrow} = \frac{1}{2} \int_0^{\epsilon_F} g(\epsilon) d\epsilon \tag{11.10}$$

onde g é a densidade de estados degenerados, com spins \uparrow e \downarrow . Na ausência de campo externo, a magnetização é dada por $M = \mu(N_{\uparrow} - N_{\downarrow}) = 0$, com μ sendo o momento magnético de spin do elétron, $\mu = -\mu_B g_s S$, $g_s=2$, $S = 1/2$.

²Pauli foi um dos pioneiros do Estado Sólido moderno.

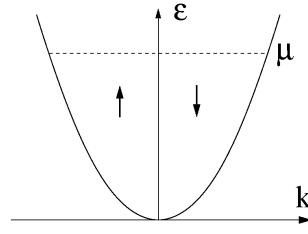


Figura 11.3: Esquema da banda de energia de um metal na ausência de campo \mathbf{H} .

Se um campo magnético é aplicado, os elétrons vão ter sua energia alterada por $\Delta E = -\vec{\mu} \cdot \mathbf{B}$, com $\Delta E_+ = +\mu_B g_s S B$ ou $\Delta E_- = -\mu_B g_s S B$. Após o potencial eletroquímico se estabilizar ficamos com $N_\uparrow \neq N_\downarrow$. Para os elétrons com spins paralelos à direção do campo temos (ver Figura 11.4)

$$N_\uparrow = \frac{1}{2} \int_0^{\varepsilon_F + \mu B} g(\varepsilon) d\varepsilon = N_\uparrow^{(0)} + \frac{1}{2} G(\varepsilon') \Big|_{\varepsilon_F}^{\varepsilon_F + \mu B}. \quad (11.11)$$

Para os elétrons com spin antiparalelo ao campo externo

$$N_\downarrow = \frac{1}{2} \int_0^{\varepsilon_F - \mu B} g(\varepsilon) d\varepsilon = N_\downarrow^{(0)} - \frac{1}{2} G(\varepsilon') \Big|_{\varepsilon_F - \mu B}^{\varepsilon_F}. \quad (11.12)$$

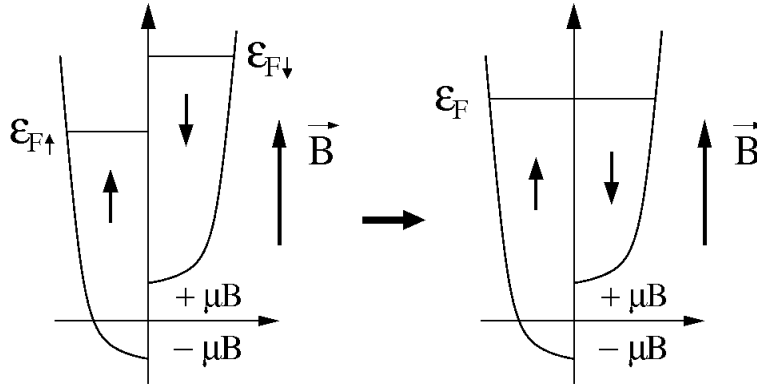


Figura 11.4: Esquema da relaxação do nível de Fermi quando um campo magnético é aplicado ao metal. Inicialmente o campo quebra a degenerescência entre as bandas e $\varepsilon_{F\downarrow} \neq \varepsilon_{F\uparrow}$ (lado esquerdo). Os potenciais químicos se igualam, mas $N_\uparrow > N_\downarrow$ (lado direito).

A diferença

$$\begin{aligned} N_\uparrow - N_\downarrow &= N_\uparrow^{(0)} + \frac{1}{2} G(\varepsilon') \Big|_{\varepsilon_F}^{\varepsilon_F + \mu B} - N_\downarrow^{(0)} + \frac{1}{2} G(\varepsilon') \Big|_{\varepsilon_F - \mu B}^{\varepsilon_F} \\ &= \frac{1}{2} G(\varepsilon_F + \mu B) - \frac{1}{2} G(\varepsilon_F - \mu B) \\ &= \frac{1}{2} \left[G(\varepsilon_F) + \frac{dG}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon_F} \mu B \right] - \frac{1}{2} \left[G(\varepsilon_F) - \frac{dG}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon_F} \mu B \right] \\ &= \mu B \frac{dG}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon_F} = \mu B g(\varepsilon_F). \end{aligned}$$

Portanto $M = \mu [N_{\uparrow} - N_{\downarrow}] = \mu^2 B g(\varepsilon_F)$, mas $g(\varepsilon_F) = \frac{3}{2} \frac{n}{\varepsilon_F}$. Então

$$M = \frac{3}{2} \frac{n \mu_B^2 B}{\varepsilon_F} = \frac{2}{3} \frac{n \mu_B^2 g_s^2}{\varepsilon_F} S^2 B$$

pois $\mu = -\mu_B g_s S$. A susceptibilidade é $\chi = \frac{3}{2} \frac{n \mu^2}{\varepsilon_F}$. A susceptibilidade estática corresponde a uma medida direta de ε_F . Incluindo o diamagnetismo dos elétrons ficamos com

$$\chi = \mu^2 g(\varepsilon_F) \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{m}{m^*} \right)^2 \right]. \quad (11.13)$$

Correções para $T > 0$ fornecem a contribuição da temperatura em 2ª ordem

$$\begin{aligned} M &= \frac{\mu_B^2 B}{V} \int_0^{\infty} g(\varepsilon) \left(-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) d\varepsilon \\ &= \frac{\mu_B^2 g(\mu)}{V} \left(1 + \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{\beta^2} \frac{g''(\mu)}{g(\mu)} \right) B \equiv \chi B. \end{aligned}$$

Para um gás de elétrons livres obtemos $\chi = \text{const} \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 \right]$, mas para os metais $T \ll T_F$.

11.4 Ferromagnetismo

Um material ferromagnético macroscópico é formado por monodomínios que estão espontaneamente magnetizados e a magnetização macroscópica total é dada pela soma vetorial desses domínios. No estado desordenado a magnetização do material é nula, no entanto, nos ferromagnetos a magnetização é um efeito não-linear em que um pequeno campo externo produz grande magnetização: tipicamente $M_F/H \sim 10^5$. Em comparação, no caso de um paramagneto $\frac{M_P}{H} \simeq \frac{N \mu_B^2}{k_B T} \simeq 10^{-4}$. Portanto $M_F/M_P \sim 10^9$, ou seja, se praticamente todos os momentos magnéticos estão alinhados no ferromagneto, apenas 1 momento em 10^9 está alinhado no paramagneto. O magnetismo também é caracterizado por curvas de histerese e por transições de fase. Uma dessas transições ocorre quando variamos a temperatura. Nesse caso temos a temperatura crítica T_c que determina a transição entre as fases, para $H=0$.

$$\begin{cases} T < T_c & \text{o sistema é descrito pela fase ferromagnética (ordenada).} \\ T > T_c & \text{o sistema é descrito pela fase paramagnética (desordenada).} \end{cases}$$

O primeiro modelo teórico capaz de descrever as propriedades básicas do ferromagnetismo foi apresentado por Weiss (1907), sem qualquer conhecimento acerca dos mecanismos microscópicos responsáveis pelo ferromagnetismo, o qual surge como resultado da interação quântica de exchange entre os elétrons do material. O **modelo de Weiss** supõe que os momentos magnéticos do material são localizados e o campo resultante que atua em cada dipolo é $B = H + \lambda M$. Para um sistema isotrópico e homogêneo, $\lambda = \lambda(M)$ é a susceptibilidade molecular, que resulta

de um efeito cooperativo dos elétrons do material. Para descrever a magnetização do íon magnético usamos o modelo quântico $M = Ng_L\mu_B JB_J(\Omega)$, onde N é a densidade de átomos (íons magnéticos) por volume, $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ é o momento angular total e

$$\Omega = \frac{g_L\mu_B B J}{k_B T}$$

No modelo ferromagnético $B = H + \lambda M$, de forma que

$$\Omega = \frac{g_L\mu_B J}{k_B T} (H + \lambda M) .$$

Se estamos interessados na magnetização espontânea, podemos fazer $H = 0$ e escrever

$$\Omega = \frac{g_L\mu_B J}{k_B T} \lambda M .$$

Temos então duas equações para a magnetização, que devem ser resolvidas consistentemente

$$\begin{cases} M = Ng_L\mu_B JB_J(\Omega) \\ M = \frac{k_B T}{g_L\mu_B J \lambda} \Omega . \end{cases} \quad (11.14)$$

Para que haja magnetização permanente, $M \neq 0$, a Eq. (11.14) deve ter solução para $T > 0$. Para obter a temperatura crítica T_c procedemos da seguinte maneira: linearizamos a expressão $M = Ng_L\mu_B JB_J(\Omega)$, para $\Omega \ll 1$, e obtemos

$$B_J(\Omega) \simeq \frac{1}{3} \frac{J+1}{J} \Omega \quad \Rightarrow \quad M = \frac{Ng_L\mu_B (J+1)}{3} \Omega .$$

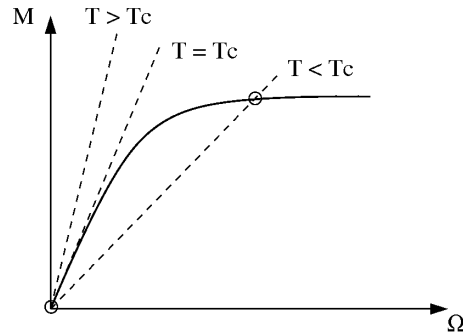


Figura 11.5: Representação gráfica da solução para o sistema de equações (11.15). A solução é dada pela intersecção das duas curvas para M . T_c é a temperatura crítica. A magnetização só acontece para $T > T_c$.

Igualando as duas equações (11.14), no regime linear da magnetização

$$\frac{k_B T_c}{g_L\mu_B J \lambda} = \frac{Ng_L\mu_B (J+1)}{3} ,$$

obtemos uma equação para T_c

$$T_c = \frac{N(g_L\mu_B)^2 J(J+1)\lambda}{3k_B} = \frac{N\mu^2 \lambda}{3k_B} \quad (11.15)$$

onde $\mu^2 = (g_L\mu_B)^2 J(J+1)$ é o quadrado do momento magnético total, isto é, $|\vec{\mu}| = g_L\mu_B|\mathbf{J}|$, com $|\mathbf{J}| = \sqrt{J(J+1)}$.

A Eq. (11.15) representa o caso da reta $T = T_c$ na Figura 11.5. Se $T > T_c$ não há magnetização permanente, pois não há solução (intersecção das curvas) no ponto $M(\Omega = 0)$. Em $T = T_c$ ocorre a transição entre as fases desordenada-ordenada (paramagnética/ferromagnética), de maneira que para $T < T_c$ existe solução para $M \neq 0$.

Para obtermos o comportamento da susceptibilidade como função da temperatura, consideramos o limite linear da magnetização

$$M \simeq \frac{Ng_L\mu_B(J+1)}{3}\Omega, \quad (11.16)$$

mas nesse caso levamos em conta a presença do campo H , tal que

$$\Omega = \frac{g_L\mu_B J}{K_B T}(H + \lambda M). \quad (11.17)$$

Resolvendo as Eqs. (11.16) e (11.17) para M encontramos

$$M \left[1 - \lambda \frac{C}{T} \right] = \frac{CH}{T} \Rightarrow \frac{M}{H} = \frac{C}{T - \lambda C},$$

com $C = \frac{N(g_L\mu_B)^2 J(J+1)}{3k_B}$ e $T_c = \lambda C$. Portanto

$$\chi = \frac{M}{H} = \frac{C}{T - T_c}. \quad (11.18)$$

A expressão acima é chamada **fórmula de Curie-Weiss**.

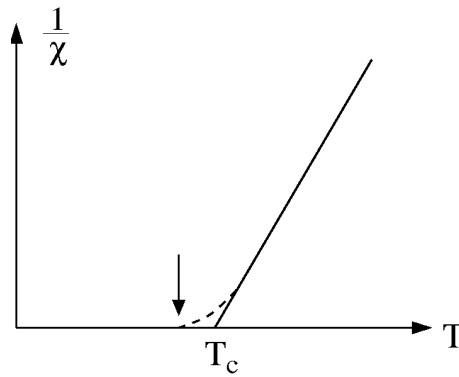


Figura 11.6: Esquema da relação $\chi \sim (T - T_c)^{-1}$ para o modelo de campo médio de Weiss. A temperatura crítica real, indicada pela seta, é menor que a temperatura crítica de Weiss.

O modelo de Weiss superestima T_c , por ser um modelo de campo médio. Como mostra a Figura 11.6, a temperatura crítica real (indicada por uma seta) está à esquerda da temperatura de Curie-Weiss. Na realidade temos $\chi \sim (T - T_c)^{-\gamma}$ e $M \sim (T - T_c)^\beta$. Para modelos de campo médio $\gamma = 1$ e $\beta = \frac{1}{2}$. Para o modelo de Heisenberg clássico em 3D, temos $\gamma \simeq 1.3960(9)$ e $\beta \simeq 0.3689(3)$. Alguns resultados experimentais estão apresentados na tabela abaixo

Material	γ	β
Fe	1,33	0,34
Co	1,21	
Ni	1,35	0,42
Gd	1,3	
CrO ₂	1,63	
CrBr ₃	1,215	0,368
EuS		0,33

É possível utilizar a curva de magnetização para determinar o momento de dipolo magnético por átomo do material. Normalizando $M(T)$, ficamos com $M(T)/M(0) = B_J(\Omega)$, pois $M(0) = Ng_L\mu_B J$ é o valor máximo da magnetização, com todos os momentos de dipolo orientados na mesma direção e N representando a densidade de dipolos do material. Também reescrevemos

$$\frac{M(T)}{M(0)} = \frac{\Omega T(J+1)}{3J\lambda C} = \frac{\Omega(J+1)}{3J} \frac{T}{T_c},$$

com

$$C = \frac{N(g_L\mu_B)^2}{3K_B} J(J+1).$$

Temos então a equação

$$\frac{\Omega(J+1)}{3J} \frac{T}{T_c} = B_J(\Omega).$$

J é um parâmetro livre, associado com o momento angular de dipolo magnético. O melhor acordo com resultados experimentais ocorre para $J = \frac{1}{2}$. Isto indica que não há participação dos momentos angulares orbitais, L , portanto o ferromagnetismo está associado ao spin S . Para uma amostra homogênea é possível medir a razão entre momento magnético e momento angular

$$\vec{\mu} = g_L\mu_B \mathbf{J} \quad \Rightarrow \quad \frac{|\vec{\mu}|}{|\mathbf{J}|} = g_L\mu_B = g_L \frac{e}{2mc} \quad (CGS)$$

Alguns resultados são

material	g_L
Fe	1,92
Co	1,85
Ni	1,84
FeNi	1,91
CoNi	1,84

$$g \simeq g_s = 2,0023$$

Na época de Weiss não se conhecia o spin, portanto o fator g medido era chamado **anômalo**.

Da magnetização de saturação, $M(0)$, e do número de átomos por unidade de volume, N , é possível determinar o número de magnetons de Bohr por átomo (n_B)

$$\frac{M(0)}{N\mu_B} = g_s J = n_B \Rightarrow M(0) = n_B N \mu_B.$$

Para a camada d temos, de acordo com a regra de Hund.

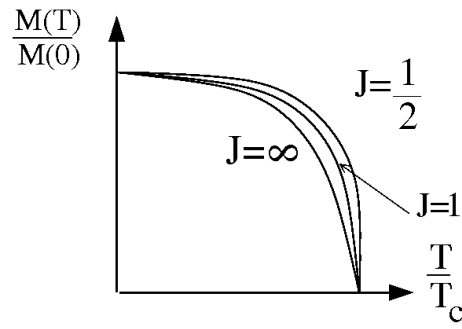


Figura 11.7: Magnetização relativa, $M(T)/M(0)$, em função da temperatura T/T_c , obtido pelo modelo de Weiss quântico para vários valores de J . O valor que melhor descreve os dados experimentais do ferromagnetismo é $J = 1/2$. Portanto, concluímos que não há participação de L no ferromagnetismo, ou seja, $\vec{\mu} = g_s \mu_B \mathbf{S}$.

# total de elétrons na camada 3d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
# de spins desemparelhados	0	1	2	3	4	5	4	3	2	1	0

Portanto, tomando o Fe como exemplo, que tem 6 elétrons na camada d, temos 4 spins desemparelhados, tal que $|S|=2$ e $n_B = g_s S = 4$. No entanto $n_B = 2,22$ para o Ferro.

11.5 Campos Magnéticos Quasi-estáticos

11.5.1 Efeitos de superfície

Consideremos um metal caracterizado por uma condutividade elétrica σ e com propriedades magnéticas lineares, resultantes de uma permeabilidade magnética μ constante, tal que

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} . \tag{11.19}$$

Nesse caso, a equação para o campo magnético é obtida da seguinte forma

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{j} \quad \text{com} \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \\ \nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \right) &= \sigma \mathbf{E} \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \mu \sigma \mathbf{E} \\ \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} &= \mu \sigma \mathbf{E} \end{aligned}$$

Escolhendo $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ para o potencial vetor, ficamos com

$$-\nabla^2 \mathbf{A} = \mu \sigma \mathbf{E}$$

Da equação da Faraday obtemos

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \\ \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) &= 0 \Rightarrow \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi \\ \mathbf{E} &= -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\end{aligned}$$

Dentro do metal, assumimos que os campos elétricos são completamente blindados e não há potenciais elétricos. Portanto

$$\phi = 0 \Rightarrow \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Finalmente obtemos

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (11.20)$$

em que obtemos a equação de difusão para \mathbf{A} no regime *quasi*-estático

$$\mathbf{j} \gg \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (11.21)$$

na equação de Ampère. A equação para \mathbf{B} é obtida de (11.20)

$$\nabla \times \nabla^2 \mathbf{A} = \mu\sigma \nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (11.22)$$

$$\nabla^2(\nabla \times \mathbf{A}) = \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}), \quad (11.23)$$

levando-se em conta que os operadores $\nabla \times$ e ∇^2 comutam, pois ∇^2 é um operador escalar. Da mesma forma para $\nabla \times$ e $\partial/\partial t$. Para os campos \mathbf{B} e \mathbf{H} , em um material homogêneo, obtemos no regime de campos dinâmicos *quasi*-estáticos

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (11.24)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (11.25)$$

11.5.2 Comprimento de penetração magnética

Consideremos um condutor semi-infinito, com interface no plano $z = 0$. Fora do metal ($z < 0$) existe um campo homogêneo oscilando no tempo com frequência w . Por simplicidade, supomos que a orientação do campo é paralela à interface. Fora do metal temos

$$\mathbf{H} = H_0 \cos(wt) \hat{x}.$$

As condições de contorno são:

$$B_1^\perp = B_2^\perp \quad e \quad H_1^\parallel = H_2^\parallel,$$

pois $\kappa = 0$ em $(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \times \hat{n} = \kappa$. Assim sendo, no interior do metal ($z > 0$) devemos ter

$$H^\perp = 0 \quad e \quad H^\parallel = H_x(z, t) = h(z) \cos(wt).$$

Substituindo $H_x = h(z) \exp(-i\omega t)$ na equação (11.25) obtemos

$$\frac{d^2}{dz^2} h(z) = -i\mu\sigma\omega h(z) .$$

Para uma dependência espacial do tipo $h(z) = \exp(\pm ikz)$, ficamos com a equação

$$(-k^2 + i\mu\sigma\omega)h(z) = 0$$

$$k^2 = i\mu\sigma\omega \Rightarrow k = (1 + i)\sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}} .$$

donde definimos o comprimento de penetração magnética

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}} \quad (11.26)$$

e

$$k = \frac{(1 + i)}{\delta} .$$

A solução mais geral para $H(z, t)$ dentro do metal é

$$\begin{aligned} H(z, t) &= (Ae^{ikz} + Be^{-ikz}) e^{-i\omega t} \\ &= Ae^{-z/\delta} \exp\left[i\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right)\right] + Be^{+z/\delta} \exp\left[-i\left(\frac{z}{\delta} + \omega t\right)\right] , \end{aligned} \quad (11.27)$$

com A e B constantes complexas.

Aplicando as condições de contorno em $z = 0$ e $\lim_{z \rightarrow \infty} h(z) = 0$ e , então, tomando a parte real de (11.27) obtemos finalmente

$$H^{\parallel}(z, t) = H_x(z, t) = H_0 e^{-z/\delta} \cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right) . \quad (11.28)$$

Para calcular o campo \mathbf{E} aplicamos a fórmula de Ampère ao campo (11.28)

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

$$\frac{dH_x(z, t)}{dz} = \sigma E_y(z, t) , \quad (11.29)$$

para obter

$$E_y(z, t) = \frac{1}{\sigma} \frac{dH_x(z, t)}{dz} = \frac{-1 + i}{\sigma\delta} H_0 e^{-z/\delta} \exp\left[i\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right)\right] .$$

Tomando a parte real de (11.5.2)

$$E_y(z, t) = \frac{\mu\omega\delta}{\sqrt{2}} H_0 e^{-z/\delta} \cos\left[\frac{z}{\delta} - \omega t + \frac{3\pi}{4}\right] . \quad (11.30)$$

Comparando os campos, podemos calcular a razão entre as amplitudes dos campos (11.28) e (11.30)

$$\frac{E_y}{H_x} \frac{\sqrt{2}}{\mu\omega\delta} = \frac{E_y}{H_x} \sqrt{\frac{\sigma}{\mu\omega}} \lesssim 1 . \quad (11.31)$$

Se o material for um bom condutor não magnético temos $\sigma/\mu_0 \gg w$, tal que ³

$$\sqrt{\frac{\sigma}{\mu_0 w}} \gg 1 \quad (11.32)$$

e o campo na superfície do metal é predominantemente magnético, com $E_y \ll H_x$.

A corrente de superfície produzida pelo campo *quasi*-estático é

$$j_y = \sigma E_y = \frac{\sqrt{2}}{\delta} H_0 e^{-z/\delta} \cos \left[\frac{z}{\delta} - wt + \frac{3\pi}{4} \right], \quad (11.33)$$

que é responsável pelo aquecimento do material por efeito Joule (ou dissipação na superfície do metal)

$$P_{Joule}(z) = \langle \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \rangle = \frac{1}{2} \mu w H_0^2 e^{-2z/\delta}, \quad (11.34)$$

onde P_{Joule} é média sobre o período.

11.6 Supercondutividade

11.6.1 Descrição fenomenológica

A descoberta da supercondutividade ocorreu por acaso em 1911, quando pesquisadores do grupo de Kammerlingh Onnes – o mesmo que liquefez o gás hélio pela primeira vez em 1908 – utilizavam as recém desenvolvidas técnicas criogênicas para estudar o comportamento da corrente elétrica em metais a temperaturas próximas do zero absoluto. O material escolhido para o experimento foi o mercúrio (Hg). Acredita-se que Onnes esperava que a resistência do mercúrio aumentasse muito nessas temperaturas, como consequência do congelamento do gás de elétrons, que é responsável pela condução de carga. A teoria quântica ainda não tinha sido formulada e o modelo de Drude era, então, utilizado para descrever o comportamento eletrônico dos metais. Para a surpresa de todos, quando a temperatura da amostra tornou-se menor que 4,2 K a resistividade do mercúrio diminuiu abruptamente para zero (decaiu por 14 ordens de magnitude em um intervalo de temperatura $\Delta T < 0,01K$). Outra importante descoberta sobre a essência da supercondutividade ocorreu 20 anos mais tarde, o efeito Meissner-Orchsenfeld, por meio do qual verifica-se que o material no estado supercondutor expulsa espontaneamente o campo magnético de seu interior. Portanto, fenomenologia da supercondutividade caracteriza-se, principalmente, pela ausência de resistência elétrica e de campo magnético no interior do material, no estado supercondutor. Baseados em ambos os efeitos, os irmãos London apresentaram a primeira teoria (fenomenológica e clássica) para o efeito, em 1935. Uma explicação microscópica para o efeito, baseada em primeiros princípios, só foi apresentada 50 anos mais tarde pela Teoria de Bardeen-Cooper-Schriffer (Teoria BCS). Há varias formas de supercondutividade, assim como vários materiais que apresentam o efeito, em todos eles a fenomenologia é bastante similar, portanto a supercondutividade é uma fase termodinâmica.

Algumas das características fenomenológicas da supercondutividade são:

- condutor ideal com ausência de resistência elétrica (efeito Joule): a supercorrente (corrente persistente) pode ser produzida em um circuito elétrico por meio da indução de

³Veja caso análogo em 13.1.5.

Faraday, sem a necessidade de contatos ohmicos

$$\begin{aligned}\varepsilon &= -\frac{d\phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt} \\ \varepsilon &= RI \\ RI &= -L\frac{dI}{dt} \\ \frac{dI}{I} &= -\frac{R}{L}dt \quad \Rightarrow \quad I(t) = I_0 \exp\left[-\frac{R}{L}t\right] \\ I(t) &= I_0 e^{-t/\tau} \quad , \quad \tau = \frac{L}{R}\end{aligned}$$

Para um metal normal $\tau \sim 0,1$ segundos, mas para o mercúrio, quando $T < T_c \approx 4,2K$, $\tau \rightarrow \infty$ e o decaimento da corrente não é observado em qualquer intervalo de tempo. L é a auto-indutância do anel.

- Na época de Onnes, os metais eram descritos pelos modelos de Drude e JJ. Thomson, que tratavam os elétrons como um fluido (ou gás) de partículas clássicas e independentes. Acredita-se que Onnes esperava que o fluido de elétrons congelasse e, conseqüentemente, $\rho \rightarrow \infty$, mas observou o oposto. Atualmente o efeito $\rho \rightarrow \infty$ para $T \rightarrow 0$ é conhecido como cristalização de Wigner e pode ocorrer em sistemas com baixa densidade eletrônica;
- muitos metais puros, além de semicondutores, ligas, cerâmicas, materiais orgânicos e fullerenos podem apresentar comportamento supercondutor;
- os metais nobres Au, Ag e Cu não apresentam supercondutividade;
- a supercondutividade não depende da estrutura cristalina, ou da presença de defeitos estruturais. De fato, pode ocorrer em ligas, poli-cristais e materiais amorfos. Portanto, neste ponto se distingue do conceito de condutor ideal;
- temperatura e campo magnético destroem o estado supercondutor;
- os metais ferromagnéticos, como Fe, Co e Ni, não apresentam supercondutividade;
- a supercondutividade pode ser descrita como um fenômeno de superfluidez;
- há várias teorias para descrever a supercondutividade: a mais simples é a teoria fenomenológica dos irmãos F. London e H. London;
- a primeira teoria microscópica a partir de princípios fundamentais foi a Teoria BCS (1957). A supercondutividade é um efeito quântico macroscópico;
- também há vários tipos de supercondutividade, que são observados experimentalmente em diferentes materiais. As mais relevantes são: Tipo I (convencional), Tipo II e alta T_C
- existem diferenças importantes entre supercondutor e condutor ideal. O efeito Meissner-Orchsenfeld demonstra se o material é realmente um supercondutor.(1933)
- Aplicações: magnetos supercondutores produzem campos magnéticos muito fortes, que são utilizados em equipamentos de MRI (Magnetic Resonance Imaging) e NMR (Nuclear Magnetic Resonance), espectrômetros de massa, como defletores em aceleradores de

partículas; o efeito de tunelamento da supercorrente através da junção supercondutor-isolante-supercondutor, conhecido como efeito Josephson, é utilizado em aparelhos do tipo SQUID (Superconducting Quantum Interference Devices), com os quais são produzidos detectores ultrasensíveis para campos magnéticos (empregados em microscópios e aparelhos de mapeamento do cérebro), detectores de fótons, termômetros e bolômetros de alta precisão; equipamentos de potência como motores, transformadores e levitação magnética.

11.6.2 Efeito Meissner-Orchsenfeld

O efeito Meissner-Orchsenfeld, esquematizado na Figura 11.8, mostra claramente a diferença fundamental entre um condutor ideal e um supercondutor. Quando um material sofre a transição de fase, do estado normal para o estado supercondutor ($T < T_c$), ele expulsa espontaneamente o campo magnético de seu interior. O efeito Meissner era inesperado na época de Ounes e demorou 20 anos para ser descoberto. Este efeito não é observado no condutor ideal.

Consideremos o lado esquerdo da Figura 11.8, se o campo magnético é aplicado ao condutor ideal correntes de indução vão surgir e o campo não penetrará em seu interior. Tais correntes de indução são descritas pela equação

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} . \quad (11.35)$$

De outro modo, se o campo externo é desligado, as correntes induzidas no condutor ideal vão aprisionar o campo magnético em seu interior.

No caso do supercondutor, lado direito da Figura, a transição para o estado supercondutor faz diminuir a energia livre do sistema, na temperatura crítica o sistema torna-se instável e para $T < T_c$ é mais favorável expelir o campo magnético a ocorrer a transição de fase para o estado supercondutor. O campo magnético tende a destruir o estado supercondutor, assim não há coexistência de ambos, rigorosamente falando para os supercondutores convencionais do tipo I.

O efeito Meissner pode ter muitas aplicações práticas no futuro, incluindo levitação magnética.

11.6.3 Equações de London para a Supercondutividade

Em 1953 os irmãos F. London e H. London apresentam um modelo fenomenológico clássico para descrever os comportamentos mais característicos dos supercondutores: a ausência de resistência elétrica e o efeito Meissner. Para descrever um supercondutor, devemos modificar equações de Maxwell para os meios contínuos. Para um condutor normal na presença de um campo \mathbf{E} estático temos, pelo modelo de Drude

$$m\dot{\mathbf{v}} + \frac{m}{\tau}\mathbf{v} = -e\mathbf{E} ,$$

onde a velocidade de arrasto pode ser definida como $\mathbf{v}_d = -(e\tau/m)\mathbf{E}$. Para um condutor ideal $\tau \rightarrow \infty$, de maneira que ficamos com $m\dot{\mathbf{v}} = -e\mathbf{E}$. Definimos a supercorrente (ou corrente persistente) como $\mathbf{j}_s = -en\mathbf{v}$. Portanto,

$$\frac{d\mathbf{j}_s}{dt} = \frac{e^2 n}{m}\mathbf{E} \quad (11.36)$$

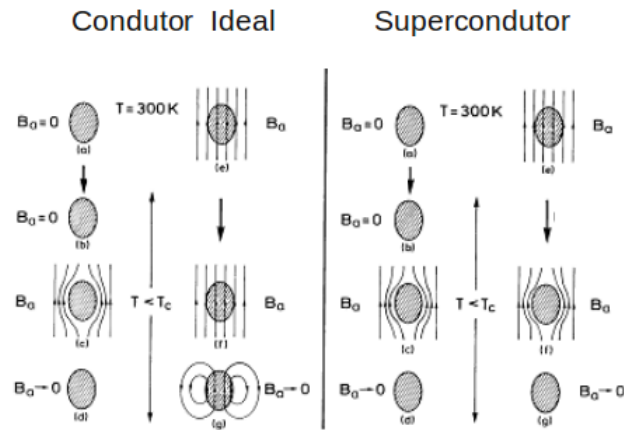


Figura 11.8: Comportamento de um condutor ideal (lado esquerdo) e de um supercondutor (lado direito) na presença de campos magnéticos externos, a medida que a temperatura decresce. Somente o supercondutor apresenta o efeito Meissner. Note que no interior do supercondutor $\mathbf{B} = 0$ sempre, independente do processo.

é a primeira equação de London, que descreve um condutor ideal. A corrente \mathbf{j}_s é produzida pelos portadores intrínsecos do supercondutor, não é uma corrente externa. Reescrevemos essa equação como

$$\frac{d\mathbf{j}_s}{dt} = \frac{q_s^2 n_s}{m_s} \mathbf{E} \quad (11.37)$$

onde q_s é a carga do portador, n_s é sua densidade volumétrica e m_s sua massa. Por exemplo, no caso da supercondutividade BCS, temos $q_s = -2e$ (par de Cooper), $n_s = \frac{n}{2}$, $m_s = 2me$.

No entanto, as propriedades de um material supercondutor não podem ser descritas apenas levando-se em conta o fato da resistividade nula nas equações de Maxwell. Continuando com a derivação de London, utilizamos as equações de Maxwell e escrevemos para a corrente persistente

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \left[\frac{m_s}{q_s^2 n_s} \frac{d\mathbf{j}_s}{dt} \right] &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{m_s}{q_s^2 n_s} \nabla \times \mathbf{j}_s + \mathbf{B} \right] &= 0. \end{aligned}$$

A equação (11.38) mostra que o termo entre colchetes deve se conservar, portanto deve ser igual a uma constante. Neste ponto as propriedades do material supercondutor são incluídas na teoria de maneira *ad-hoc*: será levado em conta que o campo \mathbf{B} é **sempre nulo** em seu interior, assim como a supercorrente \mathbf{j}_s , com exceção de uma fina camada na superfície do material. Desta maneira, obtemos

$$\nabla \times \mathbf{j}_s = -\frac{q_s^2 n_s}{m_s} \mathbf{B} \quad (11.38)$$

que é denominada 2ª equação de London. Note que para $\mathbf{B} = 0$ temos $\nabla \times \mathbf{j}_s = 0$, que indica também a ausência de turbulência. O efeito Meissner mostra que no interior de um condutor ideal o campo \mathbf{B} não é sempre nulo.

Aproveitamos para definir o parâmetro $\lambda = m_s/(n_s q_s^2)$, tal que as Equações combinadas de Maxwell-London assumem a forma

$$\mathbf{E} = \lambda \frac{d\mathbf{j}_s}{dt} \quad (11.39)$$

$$\mathbf{B} = -\lambda \nabla \times \mathbf{j}_s \quad (11.40)$$

Da equação de Ampère no regime quasi-estacionário, caso em que efeitos retardados produzidos por $\varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$ podem ser desprezados, obtemos

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_s \quad (11.41)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \nabla \times \mathbf{j}_s$$

$$\nabla \times \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{B})}_{=0} - \nabla^2 \mathbf{B} = \frac{-\mu_0}{\lambda} \mathbf{B}$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{\mu_0}{\lambda} \mathbf{B} = 0. \quad (11.42)$$

Podemos obter, no caso de correntes estacionárias, uma equação similar para \mathbf{j}_s

$$\nabla \times \mathbf{j}_s = -\frac{-1}{\lambda} \mathbf{B} \quad (11.43)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{j}_s) = \frac{-1}{\lambda} \nabla \times \mathbf{B}$$

$$\nabla \cdot \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{j}_s)}_{=0} - \nabla^2 \mathbf{j}_s = \frac{-1}{\lambda} \mu \mathbf{j}_s$$

$$\nabla^2 \mathbf{j}_s - \frac{\mu_0}{\lambda} \mathbf{j}_s = 0. \quad (11.44)$$

Note que \mathbf{j}_s inclui as correntes de magnetização. $\mathbf{j}_M = \nabla \times \mathbf{M}$. Em resumo, esta corrente \mathbf{j}_s é constituída por $\mathbf{j}_s = \mathbf{j}_p + \mathbf{j}_M$, é a resposta não a causa como em $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_0$. Mas no regime quasi-estático $\partial \mathbf{P} / \partial t = \mathbf{j}_p \ll \mathbf{j}_m$ e $\varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t \ll \mathbf{j}_0$. Portanto $\mathbf{j}_s \approx \mathbf{j}_M$.

A situação é simples para o caso de um plano supercondutor semi-infinito, com interface no plano $z = 0$. Do lado de fora, consideremos a existência de um campo externo $\mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{B}$, onde $\mathbf{B} = (B_x, 0, 0)$ é *quasi*-estático. No supercondutor $\mathbf{B} = (B_x(z), 0, 0)$. Da condição de contorno $(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times \hat{n} = \kappa_s$, escrevemos $\Delta \mathbf{H} \times \hat{n} = \kappa_s \Rightarrow \kappa_s = \kappa_s(z) \hat{y}$ e $\mathbf{j}_s = \mathbf{j}_s(z) \hat{y}$

Assim as equações para esse problema ficam a forma

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{\mu_0}{\lambda} \mathbf{B} = 0 \longrightarrow \frac{\partial^2}{\partial z^2} B_x - \frac{\mu_0}{\lambda} B_x = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{j}_s - \frac{\mu_0}{\lambda} \mathbf{j}_s = 0 \longrightarrow \frac{\partial^2}{\partial z^2} j_s - \frac{\mu_0}{\lambda} j_s = 0$$

com as soluções

$$B_x(z) = B_x(0) \exp \left[-\sqrt{\frac{\mu_0}{\lambda}} z \right] = B_x(0) \exp \left[\frac{-z}{\Lambda} \right]$$

e

$$j_s(z) = j_s(0) \exp \left[-\frac{z}{\Lambda} \right]$$

O parâmetro Λ é denominado **comprimento de penetração de London**

$$\Lambda = \sqrt{\frac{m_s}{\mu_0 n_s q_s^2}} \quad (11.45)$$

No estado supercondutor $\Lambda \sim 300 \text{ \AA}$, assumindo que cada átomo do material contribui com um elétron para a supercorrente, e $\mathbf{B} = 0$ dentro da amostra. Se a densidade de partículas no estado supercondutor tende a zero (em T_C) o comprimento Λ diverge.

11.6.4 Quantização do Fluxo magnético

Consideremos um anel supercondutor, através do qual passam as linhas de um campo externo \mathbf{B}_{ext} e que também é percorrido por uma supercorrente \mathbf{j}_s . Pela 2ª equação de London temos

$$\nabla \times \mathbf{j}_s = -\frac{q_s^2 n_s}{m_s} \mathbf{B}_{auto} \Rightarrow \mathbf{B}_{auto} = -\frac{m_s}{q_s^2 n_s} \nabla \times \mathbf{j}_s ,$$

onde \mathbf{B}_{auto} é o campo produzido pela supercorrente \mathbf{j}_s . O fluxo total de linhas de campo $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{auto} + \mathbf{B}_{ext}$ que atravessam o anel é

$$\phi = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{B}_{ext} d\mathbf{S} - \int_{\mathcal{S}} \mathbf{B}_{auto} d\mathbf{S} \quad (11.46)$$

$$= \int_{\mathcal{S}} \mathbf{B}_{ext} d\mathbf{S} + \frac{m_s}{q_s^2 n_s} \int_{\mathcal{S}} \nabla \times \mathbf{j}_s d\mathbf{S} \quad (11.47)$$

$$= \int_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{A}) d\mathbf{S} + \frac{m_s}{q_s^2 n_s} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{j}_s d\mathbf{l} \quad (11.48)$$

$$= \oint_{\mathcal{C}} \left[\mathbf{A} + \frac{m_s}{q_s^2 n_s} \mathbf{j}_s \right] d\mathbf{l} . \quad (11.49)$$

Mas $\mathbf{j} = n_s q_s \mathbf{v}_s$, então

$$\phi = \oint_{\mathcal{C}} \left[\mathbf{A} + \frac{m_s}{q_s^2 n_s} \mathbf{j}_s \right] d\mathbf{l} = \frac{1}{q_s} \oint_{\mathcal{C}} [m_s \mathbf{v}_s + q_s \mathbf{A}] d\mathbf{l} = \frac{1}{q_s} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{\Pi} d\mathbf{l} \quad (11.50)$$

sendo que $\mathbf{\Pi} = \mathbf{p} + q\mathbf{A}$ é o momento generalizado de uma partícula na presença de um campo \mathbf{B} . Aplicando a regra de quantização de Bohr-Sommerfeld

$$\phi_N = \frac{1}{q_s} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{\Pi} d\mathbf{l} = \frac{N\hbar}{q_s} , \quad (11.51)$$

com N inteiro e $\hbar =$ constante de Planck. Após a quantização escrevemos, de modo geral,

$$\phi_N = N \frac{\hbar}{q_s} \quad (11.52)$$

e para a supercondutividade BCS

$$\phi_N = N \frac{\hbar}{2e} = N\phi_0 \quad (11.53)$$

com

$$\phi_0 = \frac{\hbar}{2e} \simeq 2 \cdot 10^{-7} G \cdot cm^2 . \quad (11.54)$$

A quantização do fluxo de campo magnético foi observado em 1961 por B. S. Deaver e W. M. Fairbank (ver Figura 11.9) e, independentemente, por R. Doll e M. Nabauer.

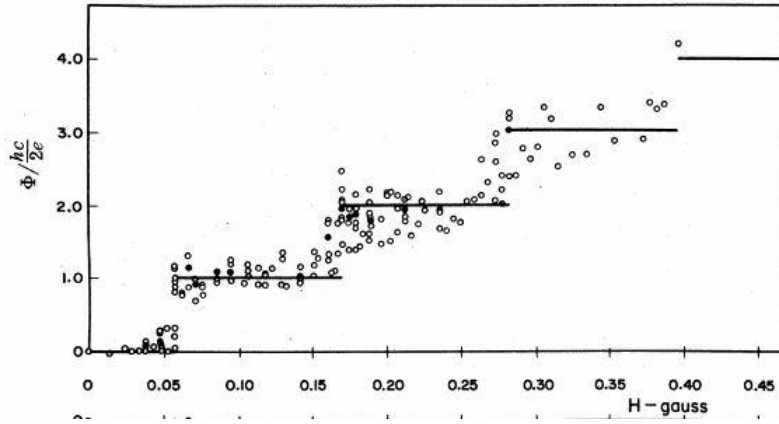


Figura 11.9: Linhas de campo aprisionadas em um cilindro supercondutor, em função do campo magnético externo H , para temperaturas abaixo da temperatura crítica. (*Phys. Rev. Lett.* **7**, 43, 1961).

11.6.5 Comparação com o monopolo magnético.

Assumindo a existência de monopolos magnéticos ρ_m , e de correntes $\mathbf{j}_m = nq_m\mathbf{v}$ de monopolos magnéticos, as equações de Maxwell poderiam ser reescritas na forma

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e \quad (11.55)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m \quad (11.56)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_e + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (11.57)$$

$$-\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{j}_m + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (11.58)$$

Da eq. (11.56), temos para o campo \mathbf{B} produzido por um monopolo magnético

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{q_m}{r^2} \mathbf{r} \quad (11.59)$$

e o correspondente fluxo de linhas de campo, $\phi_0 = q_m$. Utilizando o resultado da quantização da carga de Dirac,

$$\frac{q_e q_m}{4\pi\hbar} = \frac{N}{2}, \quad (11.60)$$

com $N = 0, 1, 2, \dots$. Portanto, para $q_e = e$, escrevemos

$$q_m = \frac{4\pi\hbar N}{2e} \quad (11.61)$$

e voltamos a obter para o **quantum de fluxo magnético**, que neste caso corresponde ao fluxo produzido pelas linhas de campo do monopolo magnético,

$$\phi_0 = q_m = \frac{h}{e}. \quad (11.62)$$

Diferentemente de (11.54), nesse caso o portador de carga elétrica tem carga $|q_s| = e$.

Capítulo 12

Equações de onda de Maxwell

12.1 Contribuições de Maxwell

Durante a primeira metade do século XIX a construção de uma teoria eletromagnética avançou bastante, graças às contribuições de Ampère e Faraday, entre outros. A conexão entre os campos elétrico e magnético foi claramente estabelecida por Faraday. Os avanços matemáticos no campo do cálculo diferencial tornou possível estabelecer equações macroscópicas em forma diferencial (local).

As equações do eletromagnetismo, antes de Maxwell, eram escritas na forma diferencial

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\end{aligned}$$

Juntamente com a Equação de Lorentz que descreve a força que atua em partículas carregadas por ação dos campos elétrico e magnético

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Ao representar os campos eletromagnéticos na forma de equações diferenciais, Maxwell percebe uma inconsistência na Equação de Ampère, $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$. Aplicando o operador divergente a ambos os lados desta equação, $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j}$, seu lado esquerdo é sempre nulo pois $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \equiv 0$ para qualquer campo vetorial, mas o lado direito satisfaz a equação de continuidade

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (12.1)$$

O resultado $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ é válido **apenas para correntes estacionárias**, as quais são responsáveis pelos campos magnetostáticos. Maxwell percebeu que é possível resolver tal inconsistência com auxílio da Lei de Gauss, pois $\rho = \varepsilon_0(\nabla \cdot \mathbf{E})$. Para isso fazemos

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \left(\mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0 \quad (12.2)$$

Portanto a conservação de carga é consistente com a equação de Ampère se fazemos

$$\nabla \cdot \mathbf{j} \longrightarrow \nabla \cdot \left(\mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right). \quad (12.3)$$

para obter a Equação de Ampère-Maxwell, que no vácuo se escreve como

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right). \quad (12.4)$$

O termo $\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ é denominado corrente de deslocamento. Esta modificação torna a Eq. (12.4) similar à equação de Faraday, com exceção das fontes de campo. Os monopólos magnéticos podem ser incluídos nas Equações do eletromagnético mediante um ajuste nas unidades de carga. (vide Jackson, cap.1)

Para baixas frequências, $\omega \leq$ microondas, $\left| \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right| \ll |\mathbf{j}|$ ou seja, a corrente de deslocamento é normalmente muito pequena quando comparada com $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$.

12.1.1 Equações de Maxwell

Com as equações para os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} obtidas até então temos 6 grandezas físicas $(E_x, E_y, E_z), (B_x, B_y, B_z)$ e 4 equações vetoriais. Podemos condensar ainda mais tais equações, numa forma elegante, que utiliza o campo escalar $\phi(\mathbf{r})$ e o campo vetorial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$.

1. Para tanto, iniciamos com a equação $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$, que nos permite introduzir o potencial vetor \mathbf{A} , tal que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, pois $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) \equiv 0$. Temos, ainda, a liberdade para escrever $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \chi$, onde $\chi(\mathbf{r})$ é um campo escalar qualquer, pois $\nabla \times (\nabla \chi) \equiv 0$.
2. Da equação de Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

e do item 1 obtemos

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = -\nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right),$$

tal que

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \equiv 0 \quad (12.5)$$

Portanto podemos definir o campo escalar $\phi(\mathbf{r})$

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi, \quad (12.6)$$

com o sinal "-", pois no caso estático $\mathbf{E} = -\nabla \phi$.

Temos, finalmente, uma relação geral entre campos \mathbf{E} e \mathbf{B} e os potenciais ϕ e \mathbf{A}

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (12.7)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (12.8)$$

Devemos notar que, diferentemente do caso estático, aqui os campos ϕ e \mathbf{A} estão acoplados. Para determinar \mathbf{E} , em geral, precisamos de ϕ e \mathbf{A} , mas as equações acima não são suficientes para determinar ϕ e \mathbf{A} , pois temos ϕ, A_x, A_y e A_z e apenas duas equações.

Podemos fixar ϕ e \mathbf{A} usando **equações de Calibre (Gauge)**. De maneira geral, os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} não se alteram se fazemos

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi \quad \text{e} \quad \phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}, \quad (12.9)$$

pois

$$\nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \quad (12.10)$$

$$-\nabla\phi' - \frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E}. \quad (12.11)$$

Portanto, podemos escolher o calibre, isto é, a expressão matemática para ϕ e \mathbf{A} que é mais apropriada para cada problema, desde que em acordo com (12.9).

Particularmente, o calibre de Coulomb ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$), também chamado de transverso, é particularmente útil na eletrostática. Embora este também possa ser usado para se obter equações de onda, as equações obtidas, então, não ficam na forma canônica. A escolha do calibre será feita adiante.

3. Prosseguimos com as equações que envolvem as fontes. Utilizando os resultados de 2 em

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

obtemos

$$\begin{aligned} \nabla \left[-\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \right] &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ -\nabla^2\phi - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \end{aligned} \quad (12.12)$$

Notemos que no caso de campos dinâmicos ϕ e \mathbf{A} dependem da distribuição de carga, isso não ocorre na eletrostática.

4. Agora partindo da equação de Ampère

$$c^2\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0}, \quad (12.13)$$

com $\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$, aplicamos os resultados de 1 e 2 para obtermos

$$c^2\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \frac{\partial}{\partial t}[-\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}] = \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0}. \quad (12.14)$$

Utilizando a identidade vetorial

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}, \quad (12.15)$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} -c^2\nabla^2\mathbf{A} + c^2\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi + \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} &= \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0} \\ \nabla^2\mathbf{A} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0c^2} \\ \nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \cdot \left\{ \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} \right\} &= -\mu_0\mathbf{j} \\ \square^2\mathbf{A} - \nabla L &= -\mu_0\mathbf{j}, \end{aligned} \quad (12.16)$$

onde $\square^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ é o operador D'alembertiano e L representa o calibre de Lorentz

$$L \equiv \vec{\nabla} \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} .$$

No Calibre de Coulomb temos $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A} = 0$, simplismente desacoplando ϕ de \mathbf{A} , que fornece imediatamente $\nabla^2 \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, mesmo para os campos dinâmicos. A desvantagem é que a equação para \mathbf{A} fica muito complicada e assimétrica

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) . \quad (12.17)$$

A seguir verificamos a consistência do calibre de Lorentz. No Calibre de Lorentz (ou Lorenz) temos

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} . \quad (12.18)$$

Este calibre deve manter os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} invariantes se fazemos

$$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A} + \nabla \chi \quad \text{e} \quad \phi \longrightarrow \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

Substituindo os novos campos na Equação de calibre verificamos que

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [\mathbf{A} + \nabla \chi] &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \right] \\ \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 \chi &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \\ - \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) &= \nabla^2 \chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0 \end{aligned}$$

Portanto, no calibre de Lorentz o campo escalar χ deve satisfazer uma equação de onda. Em comparação, no calibre de Coulomb temos $\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}' = 0$ que implica na equação de Laplace $\nabla^2 \chi = 0$ em todo o espaço, onde χ constante é solução.

5. Agora podemos escolher o calibre mais apropriado para os potenciais de ϕ e \mathbf{A} . Tomando o calibre de Lorentz, $\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}$, desacoplamos as equações para ϕ e \mathbf{A} e as tornamos simétricas, ou seja, obtemos

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{j} \\ \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} . \end{aligned}$$

Essa, no entanto, não foi a opção feita por Maxwell que preferiu escrever \mathbf{A} na forma circuitiva, isto é, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, no calibre de Coulomb (ou transversal).

As mesmas equações para \mathbf{E} e \mathbf{B} são:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = +\mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{\rho}{\epsilon_0} \right)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \nabla \times \mathbf{j}$$

basta fazer $\nabla \times \left\{ \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j} \right\}$ e levar em conta que os operadores $\nabla \times$ e ∇^2 comutam.

Mas o calibre de Lorentz determina que

$$\nabla \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

Então, para que os novos campos \mathbf{A}' e ϕ' mantenham os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} inalterados devemos ter para χ

$$\nabla^2 \chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0 \text{ (esta equação define as possíveis transformações de gauge)}$$

ou seja, o campo "auxiliar" χ também deve satisfazer uma equação de onda.

12.1.2 Ondas EM no vácuo

Temos as seguintes equações para os potenciais, longe das fontes de campo:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (12.19)$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0. \quad (12.20)$$

Primeiramente para o potencial vetor \mathbf{A} , fazemos

$$\nabla \times \left[\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right] = 0$$

$$\nabla^2 (\nabla \times \mathbf{A}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0.$$

Para o campo elétrico, tomamos a Eq. de Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \longrightarrow \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B})$$

mas $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$, tal que, na ausência de fontes $\rho = \mathbf{j} = 0$, obtemos

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right]$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0.$$

No calibre de Coulomb as equações de onda para os potenciais ficam na forma

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad (12.21)$$

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (12.22)$$

12.1.3 Potenciais Retardados

Podemos mostrar que os potenciais $\phi(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ que satisfazem as equações de onda devem ter a forma geral

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (12.23)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (12.24)$$

com

$$t' \equiv t_{ret} = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} = t - \frac{\mathcal{R}}{c}, \quad (12.25)$$

representando o tempo retardado pelo fator \mathcal{R}/c . Note que

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t}, \quad (12.26)$$

pois $t' = t - \mathcal{R}/c$ e $\mathcal{R} = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ não depende do tempo.

Substituindo o potencial retardado (12.30) para $\phi(\mathbf{r}, t)$ na equação de onda, começamos com

$$\nabla \phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \left[\nabla \rho(\mathbf{r}', t') \frac{1}{\mathcal{R}} + \rho \nabla \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \right) \right] dV' \quad (12.27)$$

mas

$$\nabla \rho(\mathbf{r}', t') = \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', t')}{\partial t'} \nabla t' = \left(\frac{-1}{c} \right) \dot{\rho} \nabla \mathcal{R} = \frac{1}{c} \dot{\rho} \hat{\mathcal{R}}, \quad (12.28)$$

levando em conta que $\frac{\partial \rho}{\partial t'} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \dot{\rho}$, e também

$$\nabla \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \right) = -\frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2}.$$

Então, ficamos com

$$\nabla \phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \left[-\frac{\rho \hat{\mathcal{R}}}{c \mathcal{R}} - \rho \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \right] dV'. \quad (12.29)$$

Em seguida, calculamos

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \left\{ -\frac{1}{c} \left[\frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}} (\nabla \dot{\rho}) + \dot{\rho} \nabla \left(\frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}} \right) \right] - \left[\frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} (\nabla \rho) + \rho \nabla \left(\frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \right) \right] \right\} dV', \quad (12.30)$$

mas

$$\nabla \dot{\rho} = -\frac{1}{c} \ddot{\rho} \nabla \mathcal{R} = -\frac{1}{c} \ddot{\rho} \hat{\mathcal{R}} \quad (12.31)$$

e

$$\nabla \left(\frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}} \right) = \frac{1}{\mathcal{R}^2} \quad , \quad \nabla \left(\frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \right) = 4\pi \delta(\vec{\mathcal{R}}) \quad (12.32)$$

Substituindo os resultados acima na equação (12.30)

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[\frac{1}{c^2} \ddot{\rho} - 4\pi\delta(\mathcal{R}) \right] dV' \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \right] - \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}', t') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' \\ \nabla^2 \phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t) . \end{aligned}$$

Note que a integral sobre $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ resulta também em $t = t'$, de maneira que ficamos com

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = -\frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} \quad (12.33)$$

O mesmo pode ser feito para $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$.

Capítulo 13

Função dielétrica: Dielétricos, Condutores e Plasmas

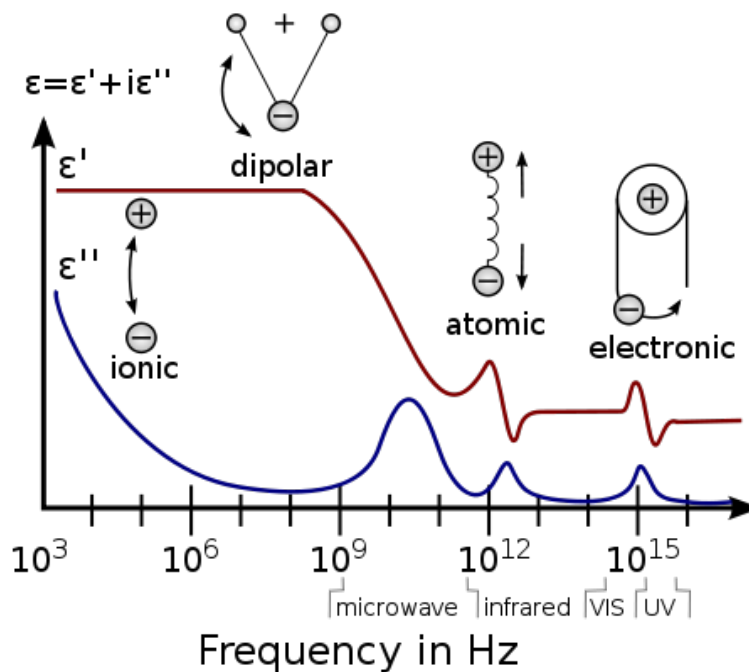


Figura 13.1: Respostas dielétricas: ilustração esquemática de vários mecanismos de polarização (polarizabilidades) e suas frequências características.

13.1 Modelo para $\varepsilon(\omega)$ em dielétricos

13.1.1 Caso Estático.

Consideremos um modelo simples de polarização eletrônica em que as cargas estão ligadas por um potencial harmônico

$$\mathbf{F} = -m\omega_0^2 \mathbf{r} .$$

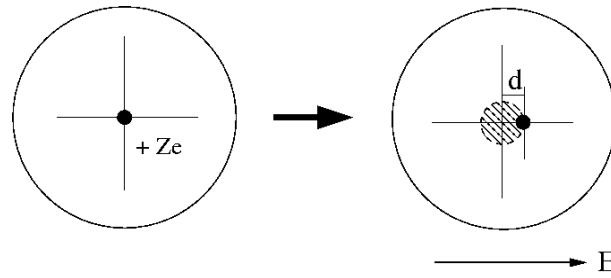


Figura 13.2: Deformação da densidade eletrônica do gás nobre devido à presença de um campo elétrico \mathbf{E} .

Na presença de um campo elétrico estático, as cargas são deslocadas da posição original de equilíbrio, assumindo a nova posição de equilíbrio, dada por

$$mw_0^2 \mathbf{r}_{eq} = e\mathbf{E} .$$

A nova distribuição assimétrica de cargas gera um momento dipolar

$$\mathbf{p}_{mol} = e\mathbf{r}_{eq} = \frac{e^2}{mw_0^2} \mathbf{E} . \quad (13.1)$$

Para esse modelo microscópico simplificado podemos definir a polarizabilidade molecular

$$\gamma_{mol} = \frac{\langle \mathbf{p}_{mol} \rangle}{\varepsilon_0 \mathbf{E}} = \frac{e^2}{mw_0^2 \varepsilon_0} , \quad (13.2)$$

que apesar de sua simplicidade, descreve qualitativamente bem o efeito de polarizabilidade molecular. Generalizando o resultado (13.2) para um sistema heterogêneo

$$\gamma_{mol} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_j \frac{e^2}{m_j w_j^2} . \quad (13.3)$$

Por outro lado, também podemos obter a polarizabilidade molecular por meio da equação constitutiva

$$\langle \mathbf{p}_{mol} \rangle = \varepsilon_0 \gamma_{mol} \mathbf{E}_{local} ,$$

de onde se obtém

$$\chi_e = \frac{N\gamma_{mol}}{1 - \frac{1}{3}N\gamma_{mol}} \Rightarrow \gamma_{mol} = \frac{3}{N} \left(\frac{\varepsilon/\varepsilon_0 - 1}{\varepsilon/\varepsilon_0 + 2} \right) . \quad (13.4)$$

A utilização das equações (13.3) e (13.4) torna possível a análise dos modelos microscópicos a partir dos dados experimentais obtidos em amostras macroscópicas.

\Rightarrow Como exemplo, podemos desenvolver um modelo simples para w_0 , no caso da polarizabilidade atômica de um gás nobre. Note que outros mecanismos de polarização existem além desse, tais como a polarizabilidade elástica (que dá origem aos efeitos piezoelétrico e ferroelétrico) e a rotacional que ocorre em líquidos.

Consideremos um átomo de simetria esférica, por exemplo um gás nobre. Na presença de um campo elétrico a nuvem eletrônica é polarizada, como mostra a Figura 13.2

A força restauradora entre as cargas pode ser aproximada por uma força Coulombiana efetiva

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_+ q_-^{ef}}{d^2} \hat{d} \equiv m_e w_0^2 \mathbf{d} , \quad (13.5)$$

com

$$q_-^{ef} = \rho_- \cdot \frac{4}{3}\pi d^3 = \frac{-Ze}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi d^3 = q_- \frac{d^3}{R^3} ,$$

onde R é o raio atômico ($R \gg d$). Para esse modelo, a frequência de ressonância da nuvem eletrônica é aproximadamente

$$w_0^2 = \frac{(Ze)^2}{4\pi\epsilon_0 m_e R^3} \quad (13.6)$$

Aplicando a Eq. (13.6) ao átomo de hidrogênio obtemos $w_0 \approx 10^{16} \text{ s}^{-1}$. Comparando o resultado com as frequências correspondentes ao espectro visível ($4,3 \times 10^{14} - 7,5 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$) e com a região do ultravioleta ($7,5 \times 10^{14} - 3 \times 10^{17} \text{ s}^{-1}$), podemos concluir que esse mecanismo de efeito de polarizabilidade é excitado por ondas eletromagnéticas de alta energia. No entanto, a frequência de ressonância diminui rapidamente com o aumento do tamanho do átomo, ou molécula. \Leftarrow

13.1.2 Caso dinâmico $\varepsilon(w)$

Consideremos o campo \mathbf{E} , gerado por uma onda EM, do tipo

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re \{ \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{kr}-wt)} \} = \Re \{ (\mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{kr}}) e^{-iwt} \} . \quad (13.7)$$

Podemos assumir, na maioria dos casos com boa aproximação, que o elétron sente a presença de um campo homogêneo que varia apenas no tempo. Para justificar a aproximação, escrevemos para o deslocamento $d_e = v_e T = 2\pi(v_e/w)$, onde v_e é a velocidade do elétron. O comprimento de onda do campo é $\lambda = 2\pi/k = 2\pi(c/w)$, onde c é a velocidade da luz. Portanto

$$\frac{v_e}{w} \ll \frac{c}{w} \Rightarrow d_e \ll \lambda . \quad (13.8)$$

A equação de movimento clássica para o elétron, na representação complexa, é

$$\ddot{z} + \gamma\dot{z} + w^2 z = \frac{eE_0}{m} e^{-iwt} , \quad (13.9)$$

onde z é um número complexo. A solução estacionária da equação acima é

$$z(t) = \frac{eE_0}{m(w_0^2 - w^2 - iw\gamma)} e^{-iwt} = A(w) e^{-iwt} , \quad (13.10)$$

com

$$\text{Re}[A(w)] = \frac{eE_0}{m} \frac{w_0^2 - w^2}{[(w_0^2 - w^2)^2 + w^2\gamma^2]} \quad (13.11)$$

$$\text{Im}[A(w)] = \frac{eE_0}{m} \frac{w\gamma}{[(w_0^2 - w^2)^2 + w^2\gamma^2]} . \quad (13.12)$$

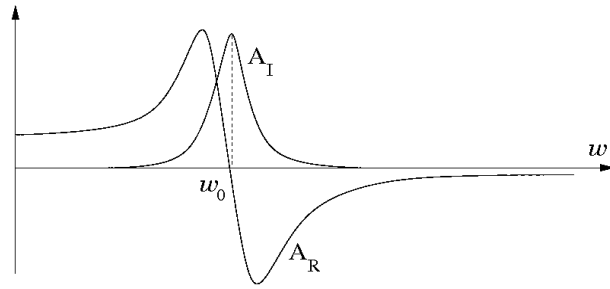


Figura 13.3: Parte real $A_R(w)$ e parte imaginária $A_I(w)$ da amplitude.

A amplitude $A(w)$ é um número complexo que representa a resposta do material à excitação provocada pelo campo AC

$$A(w) = \frac{eE_0}{m} \frac{(w_0^2 - w^2) + i\gamma w}{[(w_0^2 - w^2)^2 + \gamma^2 w^2]} . \quad (13.13)$$

A solução com sentido físico está na parte real de (13.10)

$$Re[z(t)] = \frac{eE_0}{m} \frac{1}{[(w_0^2 - w^2)^2 + \gamma^2 w^2]} \{ (w_0^2 - w^2) \cos(wt) + \gamma w \sin(wt) \} .$$

Portanto separamos a resposta do elétron em uma parte que está em fase com o campo AC e outra que está em oposição de fase. Temos as duas componentes ilustradas na Figura 13.3.

Podemos escrever a polarizabilidade molecular, $\gamma_{mol}(w)$, como

$$\langle p_{mol} \rangle = eA(w) = \frac{e^2}{m} \frac{(w_0^2 - w^2) + i\gamma w}{[(w_0^2 - w^2)^2 + \gamma^2 w^2]} E_0 = \varepsilon_0 \gamma_{mol} E ,$$

tal que

$$\gamma_{mol} = \frac{e^2}{m\varepsilon_0} \frac{(w_0^2 - w^2) + i\gamma w}{[(w_0^2 - w^2)^2 + \gamma^2 w^2]} .$$

Se temos N dipólos por unidade de volume, a polarização macroscópica é

$$\mathbf{P} = N \langle \mathbf{p}_{mol} \rangle = \varepsilon_0 N \gamma_{mol} \mathbf{E} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} ,$$

com $\chi_e(w) = N\gamma_{mol}(w)$ e $\varepsilon(w) = \varepsilon_0(1 + \chi_e(w))$.

Portanto

$$\frac{\varepsilon(w)}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} \frac{(w_0^2 - w^2) + i\gamma w}{[(w_0^2 - w^2)^2 + \gamma^2 w^2]} . \quad (13.14)$$

Generalizando o resultado acima, para o caso em que há f_j elétrons (de valência) por átomo (ou molécula) ficamos com

$$\frac{\varepsilon(w)}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} \sum_j f_j \frac{(w_j^2 - w^2) + i\gamma_j w}{[(w_j^2 - w^2)^2 + \gamma_j^2 w^2]} . \quad (13.15)$$

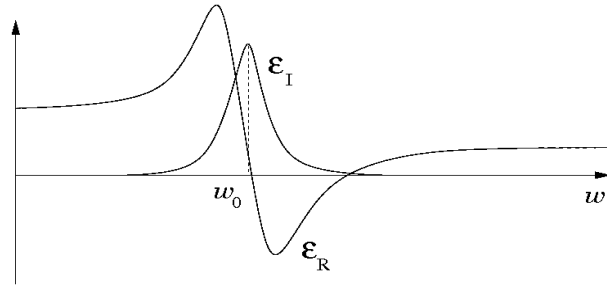


Figura 13.4: Parte real $\varepsilon_R(w)$ e parte imaginária $\varepsilon_I(w)$ da constante dielétrica de polarização.

Temos, então, para a parte real e para a parte imaginária (Figura 13.4)

$$\varepsilon_R(w) = \varepsilon_0 + \frac{Ne^2}{m} \sum_j f_j \frac{w_j^2 - w^2}{[(w_j^2 - w^2)^2 + \gamma_j^2 w_j^2]} \quad (13.16)$$

$$\varepsilon_I(w) = \frac{Ne^2}{m} \sum_j f_j \frac{\gamma_j w_j}{[(w_j^2 - w^2)^2 + \gamma_j^2 w_j^2]} . \quad (13.17)$$

Consideremos o comportamento de $\varepsilon(w)$ próximo a uma ressonância. Note que $\varepsilon_I(w)$ é geralmente positivo ¹ e relevante apenas próximo a w_0 , nesse caso temos uma absorção ressonante. Na ressonância

$$\varepsilon_I^{max}(w_0) \simeq \frac{Ne^2}{m} \frac{1}{\gamma w_0} . \quad (13.18)$$

Perto da ressonância e com $|w - w_0| \ll w_0$, podemos fazer

$$(w_0^2 - w^2) = (w_0 - w)(w_0 + w) = (w_0 - w) (w_0 - w + 2w) \approx (w_0 - w) 2w$$

que resulta na expressão aproximada para $\varepsilon_I(w)$

$$\varepsilon_I(w) \simeq \frac{Ne^2}{m} \frac{\gamma w}{\gamma^2 w^2 \left[\frac{4(w_0 - w)^2}{\gamma^2} + 1 \right]} . \quad (13.19)$$

Para calcular a largura à meia altura, $\varepsilon^{medio}(w) \equiv \varepsilon_I^{max}/2$, Eq. (13.18), devemos impor a seguinte igualdade ao denominador de (13.19)

$$\frac{4(w_0 - w)^2}{\gamma^2} + 1 = 2 ,$$

que tem por raízes $w = w_0 \pm \gamma/2$. Portanto, a largura total do pico $\varepsilon_I(w)$ é γ , como ilustra a Figura 13.5. O parâmetro γ representa o efeito de dissipação de energia que atua no movimento das cargas ligadas.

¹Podemos ainda ter $\varepsilon_I < 0$ para meios ativos. Nesse caso o meio dá energia ao campo e temos a emissão estimulada, que ocorre em lasers.

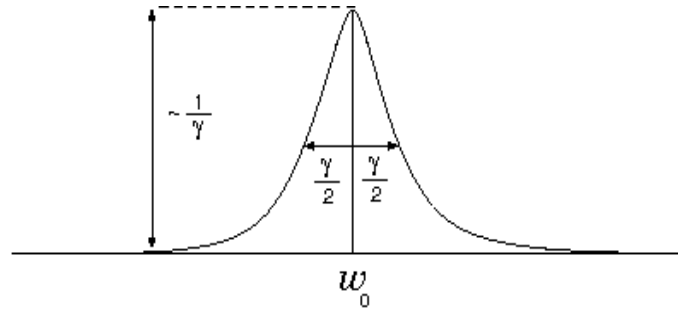


Figura 13.5: Relação entre largura e altura do pico ε_I .

13.1.3 Parâmetros Ópticos

Em seguida relacionamos a função resposta $\varepsilon(w) = \varepsilon_R(w) + i\varepsilon_I(w)$ com os parâmetros ópticos que caracterizam um meio dielétrico. O índice de refração pode ser definido por $n = c/v$, com $c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$, $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ e $n = \sqrt{\mu_r\varepsilon_r}$. Portanto

$$n^2 = \frac{\mu\varepsilon}{\mu_0\varepsilon_0} = \mu_r\varepsilon_r .$$

Por ser o caso mais comum, vamos considerar um meio não magnético, $\mu = \mu_0$. O índice de refração complexo, \tilde{n} , é dado por

$$\tilde{n}^2(w) = \frac{\varepsilon(w)}{\varepsilon_0} \quad \tilde{n} = n + iK \quad \text{com } n \text{ e } K \text{ reais}$$

$$\tilde{n}^2 = \varepsilon_R(w) + i\varepsilon_I(w) = n^2 - K^2 + 2inK$$

Igualando os termos reais e imaginários entre si

$$\begin{aligned} n^2 - K^2 &= \varepsilon_R \\ 2nK &= \varepsilon_I \end{aligned}$$

e resolvendo para n e K, obtemos

$$n^2 = \frac{1}{2} \left[\varepsilon_R + \sqrt{\varepsilon_R^2 + \varepsilon_I^2} \right] = \frac{\varepsilon_R}{2} \left[\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_I}{\varepsilon_R}\right)^2 + 1} + 1 \right] \quad (13.20)$$

$$K^2 = \frac{1}{2} \left[-\varepsilon_R + \sqrt{\varepsilon_R^2 + \varepsilon_I^2} \right] = \frac{\varepsilon_R}{2} \left[\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_I}{\varepsilon_R}\right)^2 + 1} - 1 \right] \quad (13.21)$$

Para descrever a propagação de uma onda plana no meio dielétrico

$$\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_0 \exp \left[i(\tilde{k}x - wt) \right] ,$$

utilizamos o vetor de onda complexo \tilde{k}

$$\tilde{k} = \frac{w}{v} = \frac{\tilde{n}w}{c} = (n + iK) \frac{w}{c} . \quad (13.22)$$

Ficamos então com

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, t) &= \mathbf{E}_0 \exp \left[i(\tilde{k}x - wt) \right] = \mathbf{E}_0 \exp \left[i \left(\tilde{n} \frac{w}{c} x - wt \right) \right] \\ &= \mathbf{E}_0 \exp \left[i \left((n + iK) \frac{w}{c} x - wt \right) \right] \end{aligned} \quad (13.23)$$

$$= \mathbf{E}_0 \exp \left[-K \frac{w}{c} x \right] \exp \left[i \left(n \frac{w}{c} x - wt \right) \right] \quad (13.24)$$

$$= \mathbf{E}_0 \exp \left[-\frac{x}{2\delta} \right] e^{i(kx - wt)} \quad (13.25)$$

onde

$$\delta = \frac{c}{2Kw} \quad (13.26)$$

é o fator de penetração (ou coeficiente de atenuação) e $k = 2\pi/\lambda = nw/c$ é o vetor de onda no material.

13.1.4 Modelo de Drude e Condutividade AC em Metais

Paul Drude (1863-1906) realizou um trabalho pioneiro e fundamental relacionando as propriedades ópticas dos metais à Teoria Eletromagnética de Maxwell. Drude iniciou suas pesquisas na época em que Heinrich Hertz publicava seus estudos e experimentos sobre a teoria eletromagnética, época em que as teorias de Maxwell estavam se difundindo na Alemanha. Seus trabalhos tratavam da medição de constantes ópticas de diversos cristais, da relação entre as propriedades elétricas e ópticas dos sólidos, e do desenvolvimento de modelos microscópicos para as substâncias. Em 1884, foi responsável por introduzir o símbolo c , que utilizamos para designar a velocidade da luz no vácuo. Em 1900 Paul Drude desenvolveu um modelo clássico, bastante geral e importante, para descrever as propriedades térmicas, elétricas e ópticas da matéria. Em 1927 Arnold Sommerfeld aplicou a teoria quântica e a estatística de Fermi-Dirac ao modelo de Drude para os sólidos, denominada teoria de Drude-Sommerfeld, que atualmente ainda é utilizada para estudar os metais.

Consideremos inicialmente a condutividade AC em metais. Para isso escrevemos o campo elétrico na forma

$$\mathbf{E}(t) = \int \Re \{ \mathbf{E}(w) e^{-iwt} \} dw , \quad (13.27)$$

supondo que o campo \mathbf{E} é homogêneo na região onde se encontra o elétron (no visível $\lambda \approx 10^3 - 10^4 \text{ \AA}$).

A equação de movimento para o elétron livre no metal é

$$\begin{aligned} m \frac{d\langle \mathbf{v} \rangle}{dt} &= \mathbf{F}(t) - m\gamma \langle \mathbf{v} \rangle \\ m \frac{d\langle \mathbf{v} \rangle}{dt} &= -e\mathbf{E}(t) - m\gamma \langle \mathbf{v} \rangle \end{aligned} \quad (13.28)$$

onde $\gamma = 1/\tau$, τ é o intervalo entre colisões do elétron com imperfeições da rede cristalina ² e $\langle \mathbf{v} \rangle$ é a velocidade de arrasto do elétron. Estamos interessados nos modos naturais

$$\mathbf{v}(w) = \Re \{ \mathbf{v}(w) e^{-iwt} \} . \quad (13.29)$$

²O parâmetro τ corresponde aproximadamente ao tempo de relaxação no modelo de Drude, ou seja, ao tempo que o sistema leva para voltar ao equilíbrio após o estímulo externo ser removido.

Resolvendo a equação de movimento no domínio das frequências, obtemos

$$-mw\langle\mathbf{v}(w)\rangle = -e\mathbf{E}(w) - m\gamma\langle\mathbf{v}(w)\rangle . \quad (13.30)$$

Escrevendo a densidade de corrente de cargas livres na forma $\mathbf{j} = nq\langle\mathbf{v}\rangle$, com $q = -e$ para o elétron, e substituindo na Eq. (13.30), ficamos com

$$i \frac{mw}{ne} \mathbf{j}(w) = -e\mathbf{E}(w) + \frac{m\gamma}{ne} \mathbf{j}(w)$$

$$\mathbf{j}(w) = \frac{ne^2}{m} \left[\frac{1}{\gamma - iw} \right] \mathbf{E}(w)$$

$$\mathbf{j}(w) = \sigma(w)\mathbf{E}(w) , \quad (13.31)$$

onde

$$\sigma(w) = \frac{ne^2}{m} \left[\frac{1}{\gamma - iw} \right] . \quad (13.32)$$

é a condutividade complexa para cargas livres em campos AC.

Podemos reescrever $\sigma(w)$ em termos da condutividade para campos estáticos σ_0

$$\sigma(w) = \frac{ne^2}{m} \left[\frac{1}{\gamma - iw} \right] = \frac{ne^2\tau}{m} \left[\frac{1}{1 - iw\tau} \right]$$

$$\sigma(w) = \sigma_0 \left[\frac{1}{1 - iw\tau} \right] \quad (13.33)$$

com

$$\sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m} \quad (13.34)$$

A parte complexa da condutividade torna-se importante quando $w \gtrsim \gamma$ ($w \gtrsim 1/\tau$), ela descreve o movimento de cargas que estão fora de fase (atrasadas) em relação ao campo. Nesse regime observa-se a impedância intrínseca do meio metálico, por causa de efeitos capacitivos e indutivos envolvendo o movimento das cargas livres. Como veremos, tais efeitos são necessários para que o campo eletromagnético se propague de maneira ondulatória nos metais. Quando $w \ll \gamma$ temos um comportamento puramente resistivo para o metal, com $\sigma(w) \rightarrow \sigma_0$ independente da frequência do campo AC.

13.1.5 Propriedade Ópticas dos Metais

Consideremos o caso típico de um metal neutro e não magnético ($\mu = \mu_0$), sem a presença de cargas livres ($\rho = 0$). Nessas condições as equações de Maxwell tornam-se

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (13.35)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (13.36)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (13.37)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (13.38)$$

Tomando o rotacional da equação de Faraday para os campos harmônicos $\mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp[-i\omega t]$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}) \exp[-i\omega t]$, com $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ para os materiais não magnéticos e $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ para um material homogêneo e neutro, obtemos

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mu_0 \mathbf{H}) \\ -\nabla^2 \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right],\end{aligned}$$

e substituindo $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ vamos obter

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{E} &= \mu_0 \left[\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} \right] \\ \nabla^2 \mathbf{E} &= \mu_0 [-i\omega \sigma - \omega^2 \varepsilon^{pol}] \mathbf{E} \\ \nabla^2 \mathbf{E} &= -\frac{\omega^2}{c^2} \left[\varepsilon_r^{pol} + \frac{i \sigma}{\varepsilon_0 \omega} \right] \mathbf{E} = -\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_r^{total} \mathbf{E},\end{aligned}\tag{13.39}$$

onde $\varepsilon_r^{pol} = \varepsilon^{pol}/\varepsilon_0$ é a constante dielétrica de polarização devido às cargas ligadas, e

$$\varepsilon_r^{total}(\omega) = \varepsilon_r^{pol}(\omega) + \frac{i\sigma(\omega)}{\varepsilon_0 \omega}\tag{13.40}$$

é a constante dielétrica total (efetiva) que inclui contribuições das cargas ligadas e do gás de elétrons livres. Portanto, temos o índice de refração associado à condutividade do material

$$n(\omega) = \sqrt{\varepsilon_r^{total}(\omega)} = \left[\varepsilon_r^{pol} + \frac{i\sigma(\omega)}{\varepsilon_0 \omega} \right]^{1/2}.\tag{13.41}$$

Quando $\varepsilon_r^{pol} = 1$ ($\varepsilon^{pol} \approx \varepsilon_0$), isto é, longe das frequências de ressonância, temos simplesmente um **plasma** de elétrons livres, com

$$\varepsilon_r^{total} \equiv \varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{i\sigma(\omega)}{\varepsilon_0 \omega} \quad \text{e} \quad \sigma(\omega) = \frac{ne^2}{m} \left[\frac{1}{\gamma - i\omega} \right].\tag{13.42}$$

Substituindo a condutância do gás de elétrons do metal em $\varepsilon_r(\omega)$ obtemos

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m \omega} \left[\frac{-\omega + i\gamma}{\omega^2 + \gamma^2} \right].\tag{13.43}$$

Regime Quasi-estático

No regime resistivo $\omega \ll \gamma$ ($\omega\tau \ll 1$), a Equação (13.43) é aproximadamente descrita por

$$\begin{aligned}\varepsilon_r(\omega) &\approx 1 + \frac{ne^2}{m\varepsilon_0 \omega} \frac{i\gamma}{\gamma^2} = 1 + i \frac{ne^2 \tau}{m \varepsilon_0 \omega} \\ \varepsilon_r(\omega) &\approx 1 + i \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \omega}.\end{aligned}\tag{13.44}$$

Além disso, se o metal é um bom condutor na frequência do campo AC incidente, ou seja, $\sigma_0/\varepsilon_0 \gg \omega$, temos aproximadamente

$$\varepsilon_r(\omega) \simeq i \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \omega} . \quad (13.45)$$

Substituindo a constante dielétrica complexa (13.45) que se obtém nessas condições na equação (13.39)

$$\nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_r^{total} \mathbf{E} = -i \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \omega} \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} ,$$

vemos que o campo \mathbf{E} obedece à uma equação de difusão nos bons condutores. Nesse regime *quasi*-estático

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} + i\omega\mu_0\sigma_0 \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0\sigma_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= 0 . \end{aligned} \quad (13.46)$$

Portanto, nesse caso os metais não devem permitir a propagação de radiação.

Regime Ondulatório

Quando a frequência do campo AC aumenta e atinge o regime $\omega \gg \gamma$ ($\omega \gg 1/\tau$), a constante dielétrica efetiva do metal assume a forma (longe de ressonâncias)

$$\varepsilon_r(\omega) \simeq 1 - \frac{ne^2}{m\varepsilon_0} \frac{1}{\omega^2} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} , \quad (13.47)$$

onde ω_p é a frequência característica de **plasma** do material

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}} . \quad (13.48)$$

A frequência de plasma demarca a separação entre dois comportamentos distintos para os campos AC nos metais. A Figura 13.6 ilustra uma curva típica da parte real da função dielétrica, $\varepsilon_R(\omega)$, em metais.

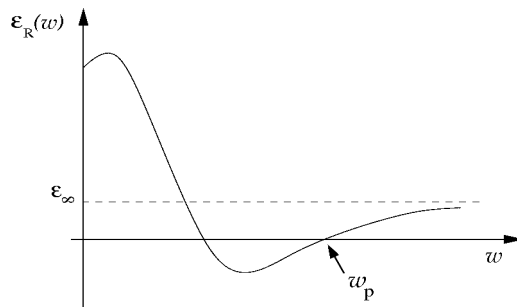


Figura 13.6: Curva típica da parte real da função dielétrica, $\varepsilon_R(\omega)$, em metais.

- $w < w_p \rightarrow \varepsilon_r(w) < 0$

Nesse caso a equação de onda (13.39) para o campo \mathbf{E} torna-se

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{E} + \frac{w^2}{c^2} \varepsilon_r(w) \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla^2 \mathbf{E} - \frac{w^2}{c^2} |\varepsilon_r(w)| \mathbf{E} &= 0.\end{aligned}\tag{13.49}$$

A solução de (13.49) deve ser um campo \mathbf{E} não oscilante que decai com a distância. O metal não permite propagação de radiação para $w < w_p$

- $w > w_p \rightarrow \varepsilon_r(w) > 0$

Nesse caso a equação de onda (13.39) para o campo \mathbf{E} torna-se

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{E} + \frac{w^2}{c^2} \varepsilon_r(w) \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla^2 \mathbf{E} + \frac{w^2}{c^2} |\varepsilon_r(w)| \mathbf{E} &= 0.\end{aligned}\tag{13.50}$$

A solução de (13.49) deve ser um campo \mathbf{E} oscilante. O metal começa a tornar-se transparente para a frequência $w > w_p$.

- $w = w_p \rightarrow \varepsilon_r(w) = 0$

Nessa frequência o plasma eletrônico oscila coletivamente em todo o material.

Portanto, de acordo com a teoria de Drude, os metais devem se tornar transparentes quando $w > w_p$. Podemos estimar o início da transparência dos metais pela fórmula da frequência de plasma $w_p = 2\pi\nu_p = 2\pi c/\lambda_p$. Para os metais alcalinos

	$\lambda_p(\text{Drude})/\text{nm}$	$\lambda_p(\text{Exp})/\text{nm}$
Li	150	200
Na	200	210
K	280	310
Rb	310	360
Cs	350	440

Para metais mais complexos o modelo de Drude não funciona muito bem. Se γ é pequena podemos ter ε com valores bastante negativos. Se γ é grande ε pode ser sempre positiva, em decorrência da equação (13.43).

Oscilações de Plasma

As oscilações de plasma são oscilações coletivas do gás de elétrons em metais, quanto quantizadas tais excitações são chamadas de **plasmons**.

Num sistema infinito (sem condições de fronteira), a frequência de plasma w_p é a raiz da equação de continuidade (conservação) de carga para campos harmônicos

$$\nabla \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t},\tag{13.51}$$

pois, substituindo

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{r}, t) &= \Re \left\{ \int \rho(\mathbf{r}, w) e^{-iwt} dw \right\} \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) &= \Re \left\{ \int \mathbf{j}(\mathbf{r}, w) e^{-iwt} dw \right\} \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}, w) &= \sigma(w) \mathbf{E}(\mathbf{r}, w),\end{aligned}$$

em (13.51) obtemos para as componentes harmônicas $\nabla(\sigma \mathbf{E}) = iw\rho$. Para o metal típico $\varepsilon^{pol} \approx \varepsilon_0$. Utilizando a Eq. Diferencial de Gauss obtemos

$$\sigma \frac{\rho}{\varepsilon_0} - iw\rho = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho(w) \left[1 + i \frac{\sigma(w)}{\varepsilon_0 w} \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + i \frac{\sigma(w)}{\varepsilon_0 w} = 0, \quad (13.52)$$

Substituindo

$$\sigma(w) = \sigma_0 \left[\frac{1}{1 - iw\tau} \right] = \frac{ne^2\tau}{m} \left[\frac{1}{1 - iw\tau} \right].$$

na equação (13.52) obtemos

$$\begin{aligned}1 + i \frac{w_p^2\tau}{w(1 - iw\tau)} &= 0 \\ w^2\tau + iw - w_p^2\tau &= 0,\end{aligned} \quad (13.53)$$

cujas raízes são

$$w = \frac{-i \pm \sqrt{(-1) + 4(w_p\tau)^2}}{2\tau}. \quad (13.54)$$

No regime em que $w_p\tau \gg 1$ ($\gamma \ll w_p$), podemos simplificar a expressão acima e encontramos as raízes

$$w \approx -\frac{i}{2\tau} \pm w_p \quad (13.55)$$

Se substituimos essas frequências características na expressão do campo AC temos

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{r}, t) &= \rho_0 \exp \left[i \left(\vec{k}\mathbf{r} - wt \right) \right] \\ \rho(\mathbf{r}, t) &= \rho_0 e^{-t/2\tau} \exp \left[i \left(\vec{k}\mathbf{r} \pm w_p t \right) \right].\end{aligned} \quad (13.56)$$

Portanto, perturbações na densidade de carga eletrônica de equilíbrio deverão oscilar com a frequência de plasma e decair num tempo da ordem de τ , que é tempo de relaxação no modelo de Drude.

Temos as energias de plasmons em alguns materiais

	hw_p (eV)
Al	15
Na	6
Si	16 – 17
Ge	16,5

Capítulo 14

Causalidade e Relações de Dispersão

14.1 Causalidade em sistemas de resposta linear

Consideremos duas grandezas físicas dependentes do tempo

$$\begin{aligned} U(t) & \text{ que designa a causa} \\ R(t) & \text{ que designa o efeito .} \end{aligned}$$

Por exemplo, podemos ter:

- \mathbf{D} é produzido pela presença de cargas externas, $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$. O efeito causado pela presença de cargas externas é a polarização do meio e o campo \mathbf{E} no meio material.
- A polarização \mathbf{P} é causada pelo campo \mathbf{E} .
- \mathbf{H} é produzido pela presença de correntes de cargas livres, $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}$. O efeito causado por esse campo externo é a magnetização do meio material.

Vamos, então, definir a transformada de Fourier para as grandezas $U(t)$ e $R(t)$ como

$$\begin{aligned} U(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dw e^{-iwt} u(w) \\ R(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dw e^{-iwt} r(w) . \end{aligned}$$

Se $U(t)$ e $R(t)$ são reais, os coeficientes de Fourier $u(w)$ e $r(w)$ devem satisfazer as relações de cruzamento $u(w) = u^*(-w)$ e $r(w) = r^*(-w)$. Para verificar esse resultado consideramos $U^*(t)$ e representamos essas grandezas por suas transformadas de Fourier. Se $U(t)$ é real temos

$$\begin{aligned} U(t) &= U^*(t) \\ \int_{-\infty}^{\infty} dw e^{-iwt} u(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} dw e^{iwt} u^*(w) \\ &= \int_{\infty}^{-\infty} (-dw') e^{-iw't} u^*(-w') \quad (w' \equiv -w) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dw' e^{-iw't} u^*(-w') . \end{aligned}$$

Portanto $u(w) = u^*(-w)$. Este resultado é válido para a transformada de Fourier de qualquer grandeza real. Tais relações são chamadas relações de cruzamento e nos permitem escrever, para $U(t)$ real,

$$\begin{aligned} U(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 dw e^{-iwt} u(w) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dw e^{-iwt} u(w) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dw' e^{i w' t} u(-w') + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dw e^{-iwt} u(w) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} [u(w)e^{-iwt} + u^*(w)e^{iwt}] dw . \end{aligned}$$

Além disso, se a relação entre causa e efeito for linear, devemos ter

$$\begin{aligned} \alpha U_1 &\longrightarrow \alpha R_1 \\ \beta U_2 &\longrightarrow \beta R_2 \\ \alpha U_1 + \beta U_2 &\longrightarrow \alpha R_1 + \beta R_2 . \end{aligned}$$

A relação linear mais geral que descreve as propriedades acima é expressa matematicamente como

$$R(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}' \int dt' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') U(\mathbf{r}', t') . \quad (14.1)$$

A função $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t')$ conecta a causa $U(\mathbf{r}', t')$ com o efeito $R(\mathbf{r}, t)$. Portanto, para estudar relações entre causa e efeito em sistemas lineares devemos determinar a função $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t')$, também denominada **propagador**. Para um meio homogêneo, em que todas as posições são equivalentes, e estacionário, em que todos os tempos são equivalentes, podemos fazer $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') = G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$. A dependência do propagador nas coordenadas espaço-temporais indica que uma perturbação, que atua no sistema em determinada posição e instante, pode produzir efeitos em diferentes posições e ser observada em outros tempos. Em muitas situações podemos fazer $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = G\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - t')$, que implica na localidade espaço-temporal entre causa e efeito, tal que $R(\mathbf{r}, t) = GU(\mathbf{r}, t)$. Essa aproximação pode ser adotada quando as escalas de tempo do observador são muito maiores que o tempo de relaxação do propagador. Uma aproximação comum para sistemas moleculares é assumir o propagador é local no espaço, mas não no tempo, isto é, $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = G(t - t')\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ ¹. Essa situação é comum em sistemas moleculares, nos quais o comprimento de onda da perturbação é muito maior que as dimensões do sistema, ou que o livre caminho médio do elétron. Portanto, para um meio homogêneo e isotrópico, os efeitos produzidos por uma perturbação local podem ser descritos de maneira geral como

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t - t')U(t')dt' . \quad (14.2)$$

Também podemos expressar o propagador pela transformada de Fourier

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dw e^{-iwt} g(w) , \quad (14.3)$$

cujos coeficientes são dados por

$$g(w) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t)e^{iwt} dt . \quad (14.4)$$

¹Como foi feito na seção 13.1.2 para calcular $\varepsilon(w)$.

Note que utilizaremos nos próximos cálculos, particularmente para G , a constante $1/2\pi$ entre as transformadas (14.3) e (14.4). Assumindo uma relação linear do tipo (14.2) entre causa e efeito, temos a seguinte relação entre os respectivos coeficientes de Fourier $r(w)$, $u(w)$ e $g(w)$.

$$\begin{aligned}
 r(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt e^{iwt} R(t) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt e^{iwt} \int dt' G(t-t')U(t') \\
 &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int dt e^{iwt} \int dt' U(t') \int dw' e^{-iw'(t-t')}g(w') \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt' U(t') \int dw' g(w')e^{iw't'} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int dt e^{i(w-w')t} dt}_{\delta(w-w')} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt' U(t')g(w)e^{iwt'} \\
 &= g(w)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt' U(t')e^{iwt'} \\
 &= g(w)u(w),
 \end{aligned} \tag{14.5}$$

ou seja, relações lineares que não são locais no tempo são locais na frequência

$$r(w) = g(w)u(w) . \tag{14.6}$$

Este resultado é conhecido como **Teorema da Convolução**. Temos ainda

$$g(w) = \frac{r(w)}{u(w)} \tag{14.7}$$

e, portanto,

$$g(w) = g^*(-w) , \tag{14.8}$$

se $U(t)$ e $R(t)$ são reais.

Fazendo o caminho inverso, consideremos duas grandezas físicas que estejam relacionadas localmente no tempo pela Eq. (14.6), por exemplo

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, w) = \varepsilon(w)\mathbf{E}(\mathbf{r}, w) . \tag{14.9}$$

Mostraremos que essa relação é expressa na forma de uma convolução entre um propagador e uma perturbação. Iniciamos reescrevendo a Eq. (14.9)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dw \varepsilon(w) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt' e^{iwt'} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') \right] e^{-iwt} \\
 &= \int dt' E(\mathbf{r}, t') \frac{1}{2\pi} \int dw [\varepsilon(w) - \varepsilon_0 + \varepsilon_0] e^{iw(t'-t)} dw \\
 &= \int dt' E(\mathbf{r}, t') \left\{ \frac{1}{2\pi} \int dw [\varepsilon(w) - \varepsilon_0] e^{iw(t'-t)} dw + \varepsilon_0 \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int e^{iw(t'-t)} dw}_{\delta(t'-t)} \right\} \\
 &= \int dt' \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') \left\{ \varepsilon_0 \delta(t' - t) + \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \int dw \left[\frac{\varepsilon(w)}{\varepsilon_0} - 1 \right] e^{-iw(t-t')} \right\} .
 \end{aligned}$$

Definindo $\tau \equiv t - t' \rightarrow t' = t - \tau$, temos

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau) \underbrace{\left[\frac{1}{2\pi} \int dw \left(\frac{\varepsilon(w)}{\varepsilon_0} - 1 \right) e^{-iw\tau} \right]}_{G(\tau)} \right\}, \quad (14.10)$$

com o propagador

$$G(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int dw \chi_e(w) e^{-iw\tau}. \quad (14.11)$$

Por fim, obtemos a relação

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau G(\tau) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau) \right\}. \quad (14.12)$$

onde $G(\tau)$ é, nesse caso, a transformada de fourier da susceptibilidade $\chi_e(w)$. A não localidade no tempo está efetivamente restrita a intervalos da ordem de γ^{-1} , que é o tempo de relaxação de $G(\tau)$. Se χ_e não depende de w na região espectral do campo externo, temos simplesmente

$$D(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 E(\mathbf{r}, t),$$

uma relação instantânea entre \mathbf{D} e \mathbf{E} .

Vamos analisar as propriedades da função $G(\tau) \equiv G(t - t')$. Uma das propriedades mais fundamentais é que, logicamente, devemos esperar que haja **causalidade** entre efeitos físicos, particularmente entre uma perturbação e a resposta do meio. Portanto, de maneira geral, devemos ter

$$G(\tau) \begin{cases} = 0 & \text{para } \tau < 0 \quad (t < t') \\ \neq 0 & \text{para } \tau \geq 0 \quad (t > t') \end{cases}$$

Assim, invocando-se a causalidade $\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \rightarrow \int_0^{\infty} d\tau$,

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \int_0^{\infty} G(\tau) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau) d\tau \quad (14.13)$$

$$= \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \int_{-\infty}^t G(t - t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt', \quad (14.14)$$

com

$$\frac{\varepsilon(w)}{\varepsilon_0} = 1 + \int_0^{\infty} G(\tau) e^{iw\tau} d\tau = 1 + \int_{-\infty}^t G(t - t') e^{iw(t-t')} dt'. \quad (14.15)$$

A expressão (14.14) é a relação linear mais geral entre \mathbf{D} e \mathbf{E} , que seja local no espaço e causal. Como \mathbf{D} e \mathbf{E} são reais, verificamos que

$$\frac{\varepsilon(-w)}{\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon^*(w)}{\varepsilon_0}.$$

A expressão para $\varepsilon(w)$ pode ser estendida ao plano complexo $w = w_R + iw_I$ se escrevemos a expressão (14.15) como

$$\frac{\varepsilon(w)}{\varepsilon_0} = 1 + \int_0^{\infty} G(\tau) e^{-w_I\tau} e^{iw_R\tau} d\tau, \quad (14.16)$$

onde $w_I > 0$ e $w_I < 0$ correspondem aos planos complexos superior e inferior, respectivamente. A Eq. (14.16) garante que $\varepsilon(w)$ é analítica no plano complexo superior, se $G(\tau)$ for bem comportado e finito para todo $\tau > 0$. Para w real ($w_I = 0$) a função também será analítica se $\lim_{t \rightarrow \infty} G(\tau) = 0$.

A permissividade dos dielétricos exemplifica essas propriedades. Se considerarmos a susceptibilidade de um sistema de cargas ligadas com uma frequência de ressonância w_0 e tempo de relaxação γ^{-1} , temos

$$\chi_e(w) = \frac{Ne^2}{m} \frac{1}{w_0^2 - w^2 - i\gamma w} . \quad (14.17)$$

Os polos de $\chi_e(w)$ são dados pelas raízes da equação

$$w^2 - i\gamma w - w_0^2 = 0 ,$$

que são

$$w = -i \frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{w_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} . \quad (14.18)$$

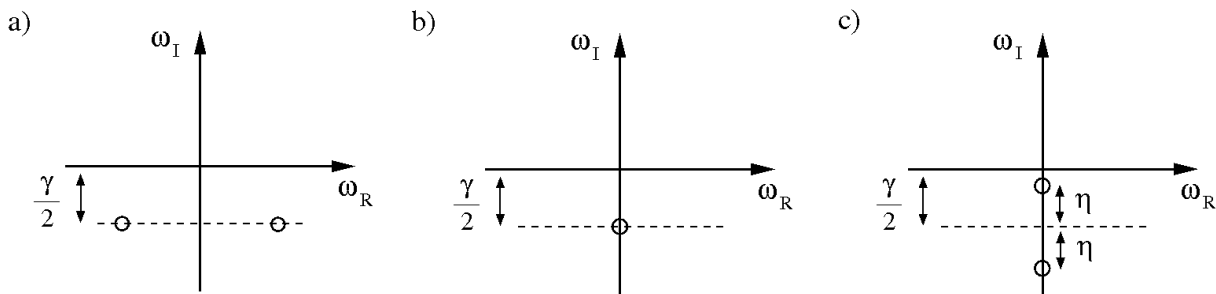


Figura 14.1: Polos da susceptibilidade $\chi_e(w)$, Eq. (14.17), para três casos distintos.

Para o caso típico, $\gamma > 0$, os polos encontram-se na metade inferior do plano complexo, como mostra a figura 14.1. Podemos ter diferentes situações físicas:

- caso a) dielétricos: $w_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 > 0$, para o amortecimento sub-crítico.
- caso b) $w_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 = 0$, para o amortecimento crítico.
- caso c) metais: $w_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 < 0$, para o super-amortecimento.

14.2 Relação de Dispersão e Equações de Kramers-Kronig

De maneira muito geral, podemos estabelecer uma relação entre as componentes real e imaginária das funções analíticas no plano complexo, as quais descrevem a resposta de sistemas lineares sob a ação de perturbações (forças) externas. O **princípio da causalidade** garante a analiticidade das funções resposta no semi-plano complexo superior. Para obter tais relações de dispersão usamos o Teorema Integral de Cauchy, que pode ser enunciado da seguinte forma: se $f(z)$ é analítica em um domínio simplesmente conexo \mathcal{D} , então para todo caminho \mathcal{C} contido em \mathcal{D} tem-se

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0. \quad (14.19)$$

Vamos exemplificar o caso para a susceptibilidade, mas os resultados que serão derivados a seguir são válidos para quaisquer funções analíticas no plano complexo superior. Aplicando o Teorema de Cauchy para

$$\chi(w) = \frac{\varepsilon(w)}{\varepsilon_0} - 1 ,$$

escrevemos

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{\chi(w')}{w' - \omega} dw' = 0 , \quad (14.20)$$

onde a representação de $\chi(w)$ é estendida para o plano complexo, com a variável de integração w' definida sobre o caminho \mathcal{C} , semi-circular de raio $R \rightarrow \infty$ no plano complexo superior, como está mostrado na figura 14.2. Note que a integração segue o sentido anti-horário.

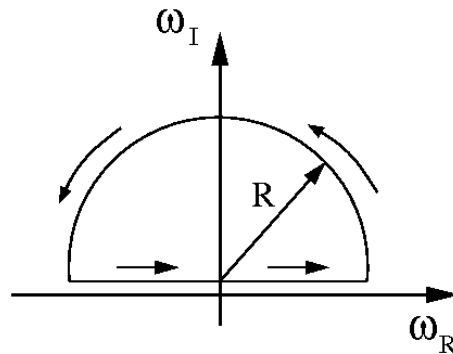


Figura 14.2: Caminho semi-circular de raio $R \rightarrow \infty$ no plano complexo superior, o qual satisfaz o Teorema de Cauchy (14.19) para funções resposta que obedecem o princípio da causalidade.

Podemos dividir a integração sobre \mathcal{C} em dois trechos

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{\chi(w')}{w' - \omega} dw' = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi(w')}{w' - \omega} dw' + \int_{\cap} \frac{\chi(w')}{w' - \omega} dw' = 0 . \quad (14.21)$$

Mas ao fazermos $R \rightarrow \infty$ obtemos

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\cap} \frac{\chi(w')}{w' - \omega} dw' = 0 . \quad (14.22)$$

Tanto em dielétricos, Eq. 14.17, quanto em metais, a susceptibilidade vai a zero quando $w \rightarrow \infty$ no eixo real. Por exemplo, na Eq. 14.17 temos

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \chi_e(w) = -\frac{Ne^2}{mw^2} .$$

Do ponto de vista da física, podemos esperar que essa propriedade seja geral e válida, pois em frequências muito acima das frequências de ressonância os elétrons se comportam se estivessem efetivamente livres e a amplitude de seu movimento é limitado apenas pela inércia. Então a integral sobre o semi-circulo superior é

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\cap} \frac{\chi_e(\omega')}{w' - w} dw' \longrightarrow \frac{2\pi R}{R^3} = 0 .$$

Assim, a integral de Cauchy torna-se uma integral sobre o eixo real ω_R

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi(w')}{w' - w} dw' = 0 . \quad (14.23)$$

Para evitar o polo em $w' = w$ fazemos um pequeno desvio circular de raio $\delta \rightarrow 0$ em torno desse ponto, pelo plano complexo superior, como mostra a Figura 14.3. Temos, portanto,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi(w')}{w' - \omega} dw' &= \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi(w')}{w' - \omega} dw' + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\square} \frac{\chi(w')}{w' - \omega} dw' = 0 \\ &= \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi(w')}{w' - \omega} dw' - i\pi\chi(\omega) = 0 , \end{aligned}$$

que fornece

$$\chi(\omega) = \frac{1}{i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi(w')}{w' - \omega} dw' . \quad (14.24)$$

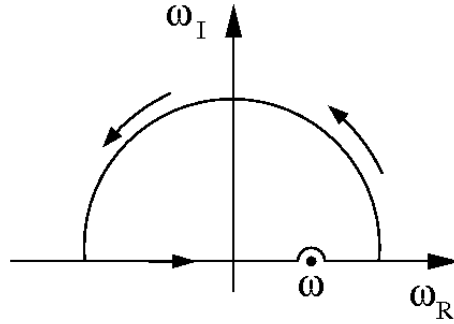


Figura 14.3: Caminho semi-circular de raio $R \rightarrow \infty$ no plano complexo superior que contorna o polo em $w' = w$, no eixo real, por desvio semi-circular de raio $\delta \rightarrow 0$.

O pequeno desvio equivale a escrever

$$\frac{1}{w' - w - i\delta} = \mathcal{P} \left(\frac{1}{w' - w} \right) - i\pi\delta(w' - \omega)$$

onde o primeiro termo é a contribuição do valor principal ² e o segundo corresponde à contribuição de semi-círculo infinitesimal.

O fator i no denominador da Eq. (14.24) produz uma conexão entre a parte real da função resposta, $\chi^{\mathcal{R}}$, com sua parte imaginária, $\chi^{\mathcal{I}}$, e vice-versa, dando origem às seguintes relações de dispersão

$$\chi^{\mathcal{R}}(w) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi^{\mathcal{I}}(w')}{w' - w} dw' \quad (14.25)$$

$$\chi^{\mathcal{I}}(w) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi^{\mathcal{R}}(w')}{w' - w} dw' . \quad (14.26)$$

²O valor principal da integral deve ser entendido como

$$\int_0^{\infty} f(w, w') dw' = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_0^{w-\delta} f(w, w') dw' + \int_{w+\delta}^{\infty} f(w, w') dw' \right] .$$

No entanto, na forma acima tais relações de dispersão não tem utilidade prática pois dependem da função $\chi(w)$ em frequências negativas. Podemos reescrever as equações e levar em conta apenas frequências positivas, para isso utilizamos o fato de que $\chi(t-t')$ deve ser real e, portanto, seus coeficientes de Fourier satisfazem $\chi(-w) = \chi^*(w)$ no plano complexo, com

$$\chi^{\mathcal{R}}(-w) = \chi^{\mathcal{R}}(w) \quad (14.27)$$

$$\chi^{\mathcal{I}}(-w) = -\chi^{\mathcal{I}}(w) . \quad (14.28)$$

Utilizando a Eq. (14.28) em (14.25) obtemos

$$\chi^{\mathcal{R}}(w) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^0 \frac{\chi^{\mathcal{I}}(w')}{w' - w} dw' + \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{\chi^{\mathcal{I}}(w')}{w' - w} dw' . \quad (14.29)$$

Fazendo a mudança de variável $w' \rightarrow -w'$ e utilizando a propriedade (14.28), ficamos com

$$\begin{aligned} \chi^{\mathcal{R}}(w) &= \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{\chi^{\mathcal{I}}(-w')}{-w' - w} dw' + \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{\chi^{\mathcal{I}}(w')}{w' - w} dw' \\ &= \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \chi^{\mathcal{I}}(w') \left\{ \frac{1}{w' + w} + \frac{1}{w' - w} \right\} dw' \\ &= \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \chi^{\mathcal{I}}(w') \frac{w'}{w'^2 - w^2} dw' . \end{aligned} \quad (14.30)$$

Para $\chi^{\mathcal{I}}(w)$ obtemos, de modo análogo,

$$\chi^{\mathcal{I}}(w) = -\frac{2w}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{\chi^{\mathcal{R}}(w')}{w'^2 - w^2} dw' . \quad (14.31)$$

Então, podemos escrever para a permissividade $\varepsilon(w)/\varepsilon_0 = 1 + \chi(w)$

$$\frac{\varepsilon^{\mathcal{R}}(w)}{\varepsilon_0} - 1 = \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{\mathcal{I}}(w')}{\varepsilon_0} \frac{w'}{w'^2 - w^2} dw' \quad (14.32)$$

$$\frac{\varepsilon^{\mathcal{I}}(w)}{\varepsilon_0} = -\frac{2w}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \left[\frac{\varepsilon^{\mathcal{R}}(w')}{\varepsilon_0} - 1 \right] \frac{1}{w'^2 - w^2} dw' . \quad (14.33)$$

As relações de dispersão (14.32) e (14.33), são conhecidas como Equações de Kramers-Kronig. Elas surgem como consequência do princípio da causalidade. Sua aplicação para a permissividade é apenas um caso particular, podemos ter, por exemplo, equações relacionando a parte real do índice de refração e o coeficiente de absorção.

14.3 Refração e Absorção

Um meio é considerado dispersivo se a velocidade de fase $v_p = w/k$ (ou a parte real do índice de refração) depende da frequência. Alternativamente, as Eqs. de Kramers-Kronig mostram que um meio é dispersivo somente se for também dissipativo em alguma região do espectro, pois se a parte imaginária da permissividade for nula teremos simplesmente $\varepsilon(w) = \varepsilon_0$, pela Eq. (14.32).

Definimos o índice de refração complexo em materiais não magnéticos como $\tilde{n}(w) = \sqrt{\varepsilon_r(w)} = n(w) + iK(w)$ (mais detalhes na seção 13.1.3). Portanto, o vetor de onda também torna-se uma grandeza complexa $\tilde{k}(w) = \frac{w}{c}\tilde{n}(w) = \frac{w}{c}[n(w) + iK(w)] = \beta(w) + i\frac{\alpha(w)}{2}$, onde $\alpha(w)$ é o coeficiente de absorção. No limite de altas frequências temos

$$\lim_{w \rightarrow \infty} n(w) = 1, \quad (14.34)$$

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \alpha(w) = 0. \quad (14.35)$$

Podemos utilizar relações de dispersão e relacionar $n(w)$ e $\alpha(w)$ por meio de Equações de Kramers-Kronig

$$\mathcal{R}e[\tilde{n}(w)] = n(w) = 1 + \frac{c}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{\alpha(w')}{w'^2 - w^2} dw', \quad (14.36)$$

$$\mathcal{I}m[\tilde{n}(w)] = \frac{\alpha(w)c}{2w} = -\frac{2w}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{n(w') - 1}{w'^2 - w^2} dw'. \quad (14.37)$$

Se o material absorve radiação em uma estreita faixa do espectro podemos escrever para a parte imaginária $\varepsilon_r^{\mathcal{I}}(w) = A\delta(w - w_n)$. Nesse caso teremos para a parte real de $\varepsilon_r^{\mathcal{R}}(w)$

$$\varepsilon_r^{\mathcal{R}} - 1 \approx \frac{2}{\pi} \frac{A w_n}{w_n^2 - w^2}. \quad (14.38)$$

Capítulo 15

Conservação de energia e momento no Eletromagnetismo

15.1 Conservação de energia

15.1.1 Meios não dispersivos

Vamos obter as equações de conservação de energia a partir das equações de Maxwell no caso de meios não dissipativos e, em seguida vamos tratar o caso de meios lineares dissipativos. Partimos das seguintes equações de Maxwell e tomamos o produto escalar com \mathbf{E} e \mathbf{B} , respectivamente

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \implies -\mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (15.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \implies \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (15.2)$$

Somando as equações e usando a identidade vetorial

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) + \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) ,$$

obtemos

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) . \quad (15.3)$$

Podemos facilmente identificar cada um dos termos da Eq. (15.3) se tratamos de fontes no vácuo, ou se o meio puder ser considerado **não dispersivo**, isto é, se $\varepsilon(\omega) \approx \varepsilon(0)$ e $\mu(\omega) \approx \mu(0)$ na região de frequência dos campos. Nesse caso podemos assumir que $\varepsilon(t)$ e $\mu(t)$ são constantes e fazer a seguinte análise. O trabalho necessário para gerar campos elétricos num meio material não dispersivo é dado por

$$U_{el} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} u_{el} dV = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV .$$

Então, se $\dot{\varepsilon}(t) = 0$,

$$\frac{\partial u_{el}}{\partial t} = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} . \quad (15.4)$$

A energia necessária para magnetizar e gerar correntes em um meio material é

$$U_{mag} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} u_{mag} dV = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV ,$$

donde obtemos de maneira análoga, se $\dot{\mu}(t) = 0$,

$$\frac{\partial u_{mag}}{\partial t} = \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} . \quad (15.5)$$

Sendo assim, para os meios não dispersivos a taxa de variação da densidade de energia armazenada no campo EM pode ser descrita por

$$\frac{\partial u_{EM}}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} . \quad (15.6)$$

O trabalho da força de Lorentz, por unidade de tempo e volume, sobre as cargas livres é

$$\begin{aligned} w_{mec} &= \vec{v} \cdot \mathbf{f}_{Lorentz} \\ &= \vec{v} \cdot (\rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}) \\ &= (\rho \vec{v}) \cdot \mathbf{E} + \rho \vec{v} \cdot (\vec{v} \times \mathbf{B}) \\ &= (\rho \vec{v}) \cdot \mathbf{E} + \rho \mathbf{B} \cdot (\vec{v} \times \vec{v}) \\ &= \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} , \end{aligned} \quad (15.7)$$

onde $\rho(\mathbf{r}) = \sum_i q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$ é a densidade de portadores. Note que o campo \mathbf{B} não realiza trabalho sobre as cargas. Portanto

$$\int_{\mathcal{V}} w_{mec} dV = \int_{\mathcal{V}} \frac{du_{mec}}{dt} dV = \frac{d}{dt} U_{mec} . \quad (15.9)$$

Por fim, o termo $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, que aparece no lado direito da Eq. (15.3), chamado de vetor de Poynting, representa a densidade de fluxo de energia do campo EM por unidade de área, sua dimensão física é energia/(área×tempo).

Podemos, então, reescrever a Eq. (15.3) na forma de uma equação local para a conservação de densidade de energia no processo de interação radiação-matéria que ocorre no volume \mathcal{V}

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial u_{EM}}{\partial t} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} . \quad (15.10)$$

Os termos à esquerda representam, respectivamente, densidade volumétrica do fluxo de energia do campo EM e taxa de variação da densidade de energia do campo EM (no caso de meios não dispersivos). À direita temos a taxa de energia trocada entre radiação e matéria (cargas livres).

Integrando a equação local de continuidade (15.10) sobre o volume \mathcal{V} e aplicando o teorema da divergência, obtemos uma equação de balanço energético para todo o sistema

$$\frac{\partial}{\partial t} (U_{EM} + U_{mec}) = - \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{S} \cdot \hat{n} dS . \quad (15.11)$$

Nesse caso, em que temos as fontes no vácuo ou meios lineares não dispersivos, é possível distinguir facilmente a contribuição devida à matéria e ao campo.

15.1.2 Dissipação e ganho de energia em meios dispersivos

Vamos analisar de forma mais geral o que ocorre na interação entre radiação e matéria em meios materiais dispersivos. Para isso partimos da equação de balanço energético

$$-\nabla \cdot \mathbf{S} = \frac{\partial w_{campo}}{\partial t} + \frac{\partial w_{matéria}}{\partial t} , \quad (15.12)$$

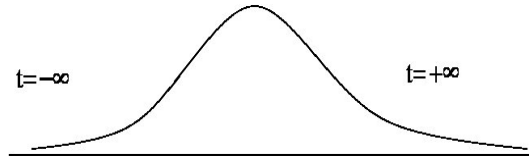


Figura 15.1: Perfil de intensidade sobre uma região \mathcal{V} produzido por um campo EM que se propaga no tempo.

onde $\partial u_{campo}/\partial t$ diz respeito exclusivamente à densidade de energia do campo EM, não necessariamente como descrito na Eq. (15.6), e o outro termo, $\partial u_{matéria}/\partial t$ está associado à troca de energia entre o campo e a matéria. Portanto uma generalização das Eqs. (15.6) e (15.8).

Para analisar a resposta de um **meio dissipativo e linear** na presença de um campo EM, consideremos que um pulso EM se propaga da esquerda para a direita, sendo que o perfil de sua intensidade numa região \mathcal{V} do espaço pode ser ilustrado pela Fig. (15.1); assumimos que o campo se nula em $t \rightarrow \pm\infty$ na região \mathcal{V} . Se integramos o fluxo de energia num ponto de \mathcal{V} durante todo o processo de interação entre campo e matéria obtemos

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \nabla \cdot \mathbf{S}(t) dt = w_{campo} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + w_{matéria} \Big|_{-\infty}^{+\infty}, \quad (15.13)$$

Sendo assim, podemos classificar o meio de acordo com a troca de energia (trabalho) entre campo e matéria. Em resumo temos:

$$\begin{aligned} \Delta w_{matéria} = 0 & \quad , \quad \text{não dispersivo} \\ \Delta w_{matéria} > 0 & \quad , \quad \text{dissipativo} \\ \Delta w_{matéria} < 0 & \quad , \quad \text{ativo (laser)} \end{aligned}$$

Utilizando a definição dos campos $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ e $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$ nas Eqs. (15.4) e (15.5) temos

$$\begin{aligned} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \left[\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right] + \mathbf{H} \cdot \left[\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \right] \\ &= \{(\mathbf{j} + \mathbf{j}_P) \cdot \mathbf{E} + \mathbf{j}_M \cdot \mathbf{H}\} + \mathbf{E} \cdot \left[\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] + \mathbf{H} \cdot \left[\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right] \\ &= \{(\mathbf{j} + \mathbf{j}_P) \cdot \mathbf{E} + \mathbf{j}_M \cdot \mathbf{H}\} + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2}{2} + \frac{\mu_0 |\mathbf{H}|^2}{2} \right] \end{aligned} \quad (15.14)$$

$$= \frac{\partial w_{matéria}}{\partial t} + \frac{\partial w_{campo}}{\partial t}, \quad (15.15)$$

onde definimos as correntes de polarização elétrica $\mathbf{j}_P = \partial \mathbf{P}/\partial t$ e magnética $\mathbf{j}_M = \mu_0 \partial \mathbf{M}/\partial t$. A equação (15.14) descreve a energia armazenada exclusivamente nos campos elétrico e magnético, descrito por w_{campo} . Ligado ao termo $w_{matéria}$ temos o trabalho do campo \mathbf{E} sobre as cargas livres e a energia de interação entre campos e correntes de polarização e magnetização no meio material.

De outro ponto de vista, isso ocorre nos sistemas dispersivos lineares porque o campo $\mathbf{D}(t)$ depende instantaneamente do valor do campo \mathbf{E} , mas também dos seus valores em tempos passados

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \int_{-\infty}^t \chi_{el}(\mathbf{r}, t - t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt' \right\} = \int_{-\infty}^t \varepsilon(\mathbf{r}, t - t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt'. \quad (15.16)$$

Analogamente para o campo \mathbf{B} . Podemos representar os campos por suas transformadas de Fourier

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, w) e^{-iwt} dw$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{B}(\mathbf{r}, w) e^{-iwt} dw ,$$

onde $\mathbf{E}(\mathbf{r}, w)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}, w)$ são campos complexos. Da hipótese de linearidade, Eq. (15.16), resultam relações diretas para os campos complexos no domínio das frequências

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, w) = \varepsilon(\mathbf{r}, w) \mathbf{E}(\mathbf{r}, w) \quad (15.17)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, w) = \mu(\mathbf{r}, w) \mathbf{H}(\mathbf{r}, w) , \quad (15.18)$$

com $\varepsilon(w)$ e $\mu(w)$ também complexos. Por fim, os campos $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ devem ser reais, portanto temos as relações de cruzamento

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, -w) = \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, w) \quad (15.19)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, -w) = \mathbf{B}^*(\mathbf{r}, w) . \quad (15.20)$$

Voltemos aos termos de energia que dependem do campo elétrico

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \left[\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right] .$$

Passando para a representação de Fourier e levando em conta que $\mathbf{j}(w) = \sigma(w) \mathbf{E}(w)$

$$\left(\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)_{\text{matéria}} =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(w) e^{-iwt} dw \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(w') \mathbf{E}(w') e^{-iw't} dw' + \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_P(w') \mathbf{E}(w') e^{-iw't} dw' \right\} =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dw \int_{-\infty}^{\infty} dw' \mathbf{E}(w) [\sigma(w') - iw' \varepsilon_P(w')] \mathbf{E}(w') e^{-i(w+w')t} , \quad (15.21)$$

onde $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_P$ e $\varepsilon_P(w)$ é a constante dielétrica de polarização para as cargas ligadas. Definindo a constante dielétrica total, $\varepsilon_{\text{total}}(w)$, para todas as cargas do sistema

$$\begin{aligned} \sigma(w') - iw' \varepsilon_P(w') &= -iw' \left[\varepsilon_P(w') - \frac{\sigma(w')}{iw'} \right] \\ &= -iw' \left[\varepsilon_P(w') + \frac{i\sigma(w')}{w'} \right] \\ &= -iw' \varepsilon_0 \left[\frac{\varepsilon_P(w')}{\varepsilon_0} + i \frac{\sigma(w')}{\varepsilon_0 w'} \right] \\ &= -iw' \varepsilon_{\text{total}}(w') , \end{aligned} \quad (15.22)$$

temos $\varepsilon_{\text{total}}(w) \equiv \varepsilon_0 \left[\varepsilon_r^P(w) + i \frac{\sigma(w)}{\varepsilon_0 w} \right]$.

Portanto

$$\left(\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)_{materia} = \int_{-\infty}^{\infty} dw \int_{-\infty}^{\infty} dw' (-iw') \varepsilon_{total}(w') \mathbf{E}(w) \cdot \mathbf{E}(w') e^{-i(w+w')t}$$

e, para o campo magnético¹

$$\left(\mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_{materia} = \int_{-\infty}^{\infty} dw \int_{-\infty}^{\infty} dw' (-iw') \mu(w') \mathbf{H}(w) \cdot \mathbf{H}(w') e^{-i(w+w')t} .$$

Voltamos para a equação (15.13) que descreve a troca de energia entre a radiação EM e o meio material

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \nabla \cdot \mathbf{S}(t) dt = \Delta w_{materia}$$

$$\Delta w_{materia} = \int_{-\infty}^{\infty} dw \int_{-\infty}^{\infty} dw' (-iw') \{ \varepsilon_{total}(w') \mathbf{E}(w) \cdot \mathbf{E}(w') + \mu(w') \mathbf{H}(w) \cdot \mathbf{H}(w') \} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(w+w')t} dt \right] .$$

Utilizando a propriedade da função delta de Dirac

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(w+w')t} dt = \delta(w+w') \Rightarrow w = -w' ,$$

e as relações de cruzamento para os campos complexos, temos

$$\begin{aligned} \Delta w_{materia} &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dw \delta(w+w') \int_{-\infty}^{\infty} dw' (-iw') \{ \varepsilon_{total}(w') \mathbf{E}(w) \cdot \mathbf{E}(w') + \mu(w') \mathbf{H}(w) \cdot \mathbf{H}(w') \} \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dw' (-iw') \{ \varepsilon_{total}(w') \mathbf{E}(-w') \cdot \mathbf{E}(w') + \mu(w') \mathbf{H}(-w') \cdot \mathbf{H}(w') \} \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dw' (-iw') \{ \varepsilon_{total}(w') \mathbf{E}^*(w') \cdot \mathbf{E}(w') + \mu(w') \mathbf{H}^*(w') \cdot \mathbf{H}(w') \} \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dw' (-iw') \{ \varepsilon_{total}(w') |\mathbf{E}(w')|^2 + \mu(w') |\mathbf{H}(w')|^2 \} \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dw' w' \{ [-i\varepsilon_R^{total}(w') + \varepsilon_I^{total}(w')] |\mathbf{E}(w')|^2 + [-i\mu_R(w') + \mu_I(w')] |\mathbf{H}(w')|^2 \} . \end{aligned} \tag{15.23}$$

Lembrando que $\varepsilon(t) = \varepsilon_R(t) + i\varepsilon_I(t) \Rightarrow \varepsilon(w) = \varepsilon_R(w) + i\varepsilon_I(w)$. Então, utilizando a relação $\varepsilon(-w) = \varepsilon^*(w)$ separadamente para as componentes real e imaginária de $\varepsilon(w)$, obtemos

$$\begin{aligned} \varepsilon_R^{total}(w) &= \varepsilon_R^{total}(-w) && \text{é par} \\ \varepsilon_I^{total}(w) &= -\varepsilon_I^{total}(-w) && \text{é ímpar} , \end{aligned}$$

o mesmo se aplica a $\mu(w)$. Além disso, $|\mathbf{E}(w)|^2$ e $|\mathbf{H}(w)|^2$ são pares e w' é ímpar. Por fim, resta apenas

$$\Delta w_{materia} = 2 \times 2\pi \int_0^{\infty} dw' w' \{ \varepsilon_I^{total}(w') |\mathbf{E}(w')|^2 + \mu_I(w') |\mathbf{H}(w')|^2 \} . \tag{15.24}$$

¹Assumimos que tanto a permissividade ε_{total} como a permitividade são escalares (representam sistemas homogêneos). Em casos mais gerais essas grandezas devem ser descritas por tensores e teremos os produtos $\mathbf{E}(w) \cdot \overleftrightarrow{\varepsilon}_{total}(w') \cdot \mathbf{E}(w')$ e $\mathbf{H}(w) \cdot \overleftrightarrow{\mu}(w') \cdot \mathbf{H}(w')$.

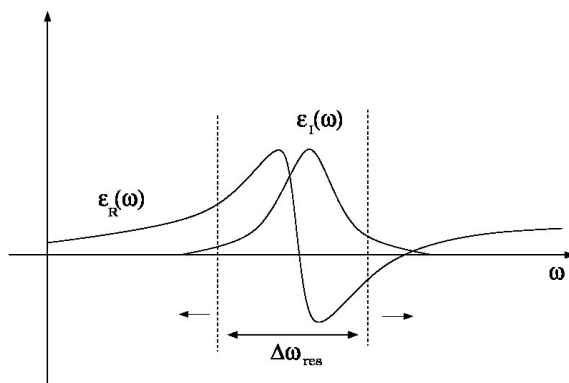


Figura 15.2: Partes real (ϵ_R) e imaginária (ϵ_I) da permissividade em função da frequência w . A região de dispersão anômala se encontra na parte central da figura.

Portanto, para que o meio seja dissipativo, $\Delta w_{matéria} > 0$, devemos ter $\epsilon_I^{total}(w)$ ou $\mu_I(w)$ não nulos em algum intervalo de frequências. Para o meio ativo, $\Delta w_{matéria} < 0$, devemos ter predomínio de pelo menos um dos termos $\epsilon_I^{total}(w) < 0$ ou $\mu_I(w) < 0$. Para um meio não dispersivo, $\Delta w_{matéria} = 0 \Rightarrow \epsilon_I(w) = \mu_I(w) \approx 0$. Note que em todo material existem regiões de transparência, onde $\epsilon_R \gg \epsilon_I$ e $\mu_R \gg \mu_I$, vide Fig. 15.2.

15.2 Conservação de Momento

Como foi feito para o caso da energia, podemos escrever uma equação de balanço para o momento linear (e angular) nas interações entre radiação e matéria. Iniciamos por considerar o caso de campos estáticos, em que a equação para troca de momento entre radiação e matéria assume a forma de equações para a força elétrica e a força magnética sobre as cargas e as correntes, respectivamente.

15.2.1 Tensor de força elétrica

A força elétrica resultante sobre corpos carregados que ocupam um volume \mathcal{V} pode ser calculada por meio do campo \mathbf{E} na superfície de \mathcal{V} , sem que se tenha conhecimento da distribuição de cargas nos objetos, pois os campos contém toda a informação sobre as interações eletromagnéticas. Usualmente concebemos a força sobre um elemento de carga como uma propriedade da matéria e calculamos a força elétrica nesse objeto como

$$d\mathbf{F}_{el} = \rho \mathbf{E} dV$$

e a força resultante sobre os corpos carregados que ocupam o volume \mathcal{V} como

$$\mathbf{F}_{el} = \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{E} dV. \quad (15.25)$$

Note que o campo \mathbf{E} é o campo total $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{cargas} + \mathbf{E}_{ext}$ na região \mathcal{V} . A componente \mathbf{E}_{ext} é produzida por cargas externas à \mathcal{V} , portanto $\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E}_{cargas} + \nabla \cdot \mathbf{E}_{ext} = \nabla \cdot \mathbf{E}_{cargas} = \rho$.

Além disso, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{E}_{cargas}(\mathbf{r}) dV &= \\ \int_{\mathcal{V}} dV dV' \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r}-\mathbf{r}') &= 0, \end{aligned} \quad (15.26)$$

pois a carga (estática) não exerce força sobre ela mesma. Portanto, podemos reescrever a Eq. (15.25) utilizando apenas o campo elétrico total (resultante), se fazemos

$$\mathbf{F}_{el} = \varepsilon_0 \int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} dV, \quad (15.27)$$

supondo que tratamos de cargas no vácuo.

Para integrar por partes a Eq. (15.27), primeiramente manipulamos o integrando da seguintes forma ²

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} &= \sum_{\alpha} [(\nabla \cdot \mathbf{E}) E_{\alpha} \hat{\alpha}] \\ &= \sum_{\alpha} [\nabla \cdot (E_{\alpha} \mathbf{E}) \hat{\alpha} - (\mathbf{E} \cdot \nabla) E_{\alpha} \hat{\alpha}] \\ &= \sum_{\alpha} \nabla \cdot (E_{\alpha} \mathbf{E}) \hat{\alpha} - (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (15.28)$$

tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{el} &= \varepsilon_0 \sum_{\alpha} \left[\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (E_{\alpha} \mathbf{E}) dV \right] \hat{\alpha} - \varepsilon_0 \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} dV \\ &= \varepsilon_0 \sum_{\alpha} \left[\oint_S E_{\alpha} (\mathbf{E} \cdot \hat{n}) dS \right] \hat{\alpha} - \varepsilon_0 \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} dV \\ &= \varepsilon_0 \oint_S \mathbf{E} (\mathbf{E} \cdot \hat{n}) dS - \varepsilon_0 \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} dV. \end{aligned} \quad (15.29)$$

Utilizando a identidade vetorial

$$\begin{aligned} \nabla (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) &= 2 (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} + 2 \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}), \\ -(\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} &= -\frac{1}{2} \nabla (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}), \end{aligned} \quad (15.30)$$

com $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ obtemos ³

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{el} &= \varepsilon_0 \oint_S \mathbf{E} (\mathbf{E} \cdot \hat{n}) dS - \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_{\mathcal{V}} \nabla (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) dV \\ &= \oint_S \varepsilon_0 \left[\mathbf{E} (\mathbf{E} \cdot \hat{n}) - \frac{|\mathbf{E}|^2}{2} \hat{n} \right] dS \end{aligned} \quad (15.31)$$

$$= \oint_S \mathbb{T}_{el} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (15.32)$$

²Utilizamos a identidade vetorial $\nabla \cdot (\psi \vec{a}) = (\vec{a} \cdot \nabla) \psi + \psi (\nabla \cdot \vec{a})$.

³Na seção *Conservação de Momento Linear na eletrodinâmica* o termo $\nabla \times \mathbf{E} \neq 0$ e, portanto, será levado em conta para simplificar a Eq. (15.46).

A Eq. (15.32) é completamente equivalente à fórmula integral de Coulomb para a força elétrica Eq. (15.25). Podemos definir o termo entre colchetes na Eq. (15.31) como o produto entre o tensor eletrostático de forças (\mathbb{T}_{el}) e o versor \hat{n} normal à superfície \mathcal{S}

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{el} \cdot \hat{n} &= \varepsilon_0 \left[\mathbf{E} (\mathbf{E} \cdot \hat{n}) - \frac{|\mathbf{E}|^2}{2} \hat{n} \right] \\ &= \varepsilon_0 \sum_{\alpha} E_{\alpha} \left(\sum_{\beta} E_{\beta} n_{\beta} \right) \hat{\alpha} - \sum_{\alpha} \frac{|\mathbf{E}|^2}{2} n_{\alpha} \hat{\alpha} \\ &= \sum_{\alpha} \left[\sum_{\beta} \varepsilon_0 \left(E_{\alpha} E_{\beta} - \frac{|\mathbf{E}|^2}{2} \delta_{\alpha,\beta} \right) n_{\beta} \right] \hat{\alpha} \end{aligned} \quad (15.33)$$

$$= \sum_{\alpha} \left[\sum_{\beta} \mathbb{T}_{el}(\alpha, \beta) n_{\beta} \right] \hat{\alpha} = \sum_{\alpha} (\mathbb{T}_{el})_{\alpha} \hat{\alpha}, \quad (15.34)$$

com $\alpha, \beta = x, y, z$. Na forma matricial o tensor \mathbb{T}_{el} assume a forma

$$\mathbb{T}_{el} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} E_x^2 - \frac{|\mathbf{E}|^2}{2} & E_x E_y & E_x E_z \\ E_y E_x & E_y^2 - \frac{|\mathbf{E}|^2}{2} & E_y E_z \\ E_z E_x & E_y E_z & E_z^2 - \frac{|\mathbf{E}|^2}{2} \end{pmatrix}. \quad (15.35)$$

15.2.2 Tensor de força magnética

Nesse caso partimos da equação para a força magnética sobre correntes estacionárias

$$\mathbf{F}_{mag} = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) dV,$$

que pode ser reescrita unicamente em termos do campo magnético, de maneira análoga ao que foi feito na seção anterior. Para isso utilizamos a fórmula de Ampère (na situação de campos estáticos) para substituir a densidade de corrente de cargas livres pelo campo \mathbf{B}

$$\mathbf{F}_{mag} = \frac{1}{\mu_0} \int_{\mathcal{V}} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} dV. \quad (15.36)$$

Aplicando a identidade vetorial

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a})$$

ao campo \mathbf{B} , obtemos nesse caso

$$\nabla \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) = 2(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} - 2(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B},$$

tal que

$$\mathbf{F}_{mag} = \frac{1}{\mu_0} \int_{\mathcal{V}} \left[(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} - \frac{1}{2} \nabla(|\mathbf{B}|^2) \right] dV. \quad (15.37)$$

O primeiro termo que aparece no integrando da Eq. (15.37) pode ser reescrito em uma forma mais adequada, aproveitando o resultado (15.28) e levando em conta que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} &= \sum_{\alpha} \nabla \cdot (B_{\alpha}\mathbf{B}) \hat{\alpha} - (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} \\ (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} &= \sum_{\alpha} \nabla \cdot (B_{\alpha}\mathbf{B}) \hat{\alpha}. \end{aligned} \quad (15.38)$$

Aplicando o teorema da divergência aos termos resultantes, encontramos

$$\mathbf{F}_{mag} = \oint_S \frac{1}{\mu_0} \left[\mathbf{B}(\mathbf{B} \cdot \hat{n}) - \frac{|\mathbf{B}|^2}{2} \hat{n} \right] dS = \oint_S \mathbb{T}_{mag} \cdot \hat{n} dS, \quad (15.39)$$

com

$$\mathbb{T}_{mag} = \varepsilon_0 c^2 \begin{pmatrix} B_x^2 - \frac{|\mathbf{B}|^2}{2} & B_x B_y & B_x B_z \\ B_y B_x & B_y^2 - \frac{|\mathbf{B}|^2}{2} & B_y B_z \\ B_z B_x & B_y B_z & B_z^2 - \frac{|\mathbf{B}|^2}{2} \end{pmatrix}. \quad (15.40)$$

15.2.3 Tensor de forças de Maxwell

O tensor de forças de Maxwell é definido no vácuo como $\mathbb{T}_{EM} = \mathbb{T}_{el} + \mathbb{T}_{mag}$, com seus elementos dados por

$$\mathbb{T}_{EM}(\alpha, \beta) = \varepsilon_0 \left[(E_\alpha E_\beta + c^2 B_\alpha B_\beta) - \frac{1}{2} \delta_{\alpha, \beta} (|\mathbf{E}|^2 + c^2 |\mathbf{B}|^2) \right], \quad (15.41)$$

na ausência de meios materiais. Note que \mathbb{T}_{EM} é simétrico. Para a interação entre campos **estáticos** com cargas e correntes de cargas livres vale a igualdade

$$\int_V (\rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}) dV = \oint_S \mathbb{T}_{EM} \cdot \hat{n} dS. \quad (15.42)$$

Aplicando o teorema da divergência ao termo da direita, obtemos a relação local para a densidade de força eletromagnética

$$\mathbf{f}_{mec} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbb{T}_{EM}. \quad (15.43)$$

⇒ Conexão com a Teoria da Elastecidade

Da teoria da elastecidade temos

$$\begin{aligned} \vec{T}_n &= \mathbb{T} \cdot \hat{n} \\ \begin{pmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} T_{ii} & T_{ij} & T_{ik} \\ T_{ji} & T_{jj} & T_{jk} \\ T_{ki} & T_{kj} & T_{kk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_i \\ n_j \\ n_k \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (15.44)$$

O tensor \mathbb{T} é simétrico: os elementos diagonais correspondem à pressão (força/área) e os elementos não diagonais estão relacionados às forças de cisalhamento. A tração total agindo em cada direção é

$$\begin{aligned} T_i &= \underbrace{T_{ii} n_i}_{\text{pressão}} + \underbrace{T_{ij} n_j + T_{ik} n_k}_{\text{cisalhamento}} \\ T_j &= T_{jj} n_j + T_{ji} n_i + T_{jk} n_k \\ T_k &= T_{kk} n_k + T_{ki} n_i + T_{kj} n_j \end{aligned}$$

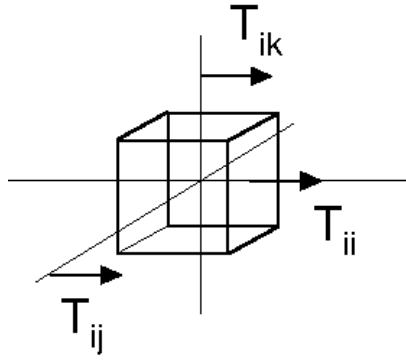


Figura 15.3: Representação gráfica da força resultante na direção \hat{i} , composta por um termo de pressão, T_{ii} , e dois termos de cisalhamento, T_{ij} e T_{ik} .

15.2.4 Conservação de Momento Linear na eletrodinâmica

Levando em conta os campos dinâmicos um novo termo surge nas equações de força, (15.42) e (15.43), transformando-as em equações de conservação para o momento linear, envolvendo os graus de liberdade do campo EM e os graus de liberdade mecânicos. Lembremos que a força de Lorentz é responsável pela troca de momento entre o campo EM e o sistema mecânico. No caso de **campos estáticos** temos simplesmente

$$\frac{d\mathbf{P}_{mec}}{dt} = \int_V (\rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}) dV . \quad (15.45)$$

Vejam os como a Eq. (15.45) se transforma no caso de **campos dinâmicos**. Substituindo os termos de fonte pelos respectivos campos dinâmicos

$$\begin{aligned} \rho &= \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} \\ \mathbf{j} &= \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} &= \varepsilon_0 (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} . \end{aligned} \quad (15.46)$$

Os dois primeiros termos no lado direito da equação já foram obtidos nas seções anteriores e produzem, respectivamente, os tensores de força elétrica e magnética. No entanto, o último termo do lado direito é novo e aparece nessa situação pois estamos levando em conta campos que variam no tempo. Analisando esse novo termo vemos que

$$\begin{aligned} -\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} &= \varepsilon_0 \left\{ -\frac{\partial (\mathbf{E} \times \mathbf{B})}{\partial t} + \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right\} \\ &= \varepsilon_0 \left\{ -\frac{\partial (\mathbf{E} \times \mathbf{B})}{\partial t} - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) \right\} . \end{aligned} \quad (15.47)$$

O termo $\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})$ é cancelado pelo termo equivalente da Eq. (15.30), que no caso dinâmico não é nulo. Obtemos, portanto,

$$\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} , \quad (15.48)$$

e definimos a quantidade

$$\mathbf{g} = \frac{1}{c^2} \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} \quad (15.49)$$

como a densidade de momento linear do campo eletromagnético, onde $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ é o vetor de Poynting. Portanto, aproveitando os resultados das seções anteriores e a Eq. (15.46), o balanço de momento linear na Eq. (15.45) pode ser reescrito na forma

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}_{mec}}{dt} &= \int_{\mathcal{V}} (\rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}) dV \\ \frac{d\mathbf{P}_{mec}}{dt} &= \oint_{\mathcal{S}} (\mathbb{T}_{el} + \mathbb{T}_{mag}) \cdot \hat{n} dS - \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} dV \\ \frac{d}{dt} (\mathbf{P}_{mec} + \mathbf{P}_{EM}) &= \oint_{\mathcal{S}} (\mathbb{T}_{EM}) \cdot \hat{n} dS \end{aligned} \quad (15.50)$$

que representa a conservação de momento linear em um sistema de partículas carregadas interagindo com campos eletromagnéticos no vácuo. Mais explicitamente

$$\int_{\mathcal{V}} (\rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}) dV + \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} dV = \oint_{\mathcal{S}} (\mathbb{T}_{EM}) \cdot \hat{n} dS . \quad (15.51)$$

e a força total que uma quantidade de matéria sente na direção α é

$$F_{\alpha} = \frac{-1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})_{\alpha} dV + \oint_{\mathcal{S}} \sum_{\beta} (\mathbb{T}_{EM})_{\alpha\beta} n_{\beta} dS . \quad (15.52)$$

Como resultado desse processo de interação temos um balanço para a troca de momento entre partículas e campo, no lado esquerdo da Eq. (15.51), que corresponde ao fluxo total de momento eletromagnético através de \mathcal{S} . Aplicando o teorema da divergência ao termo da direita na Eq. (15.51), obtemos uma expressão local para a conservação de momento linear na interação radiação-matéria

$$\nabla \cdot (-\mathbb{T}_{EM}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} = -\mathbf{f}_{mec} , \quad (15.53)$$

que é semelhante à Eq. (15.12) para a conservação de energia envolvendo o campo eletromagnético

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial u_{EM}}{\partial t} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} . \quad (15.54)$$

Os termos não nulos à direita de (15.53) e (15.54) indicam que o sistema eletromagnético é aberto e está em contato com o sistema mecânico, diferentemente da equação para a conservação da carga

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 . \quad (15.55)$$

15.2.5 Campos Harmônicos

Em se tratando de eletrodinâmica, os campos complexos que variam harmonicamente no tempo constituem uma situação típica. Portanto, para tais casos, é conveniente redefinir a maneira de se calcular algumas grandezas, como faremos a seguir. Consideremos dois campos harmônicos com dependência espacial arbitrária,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \quad (15.56)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} . \quad (15.57)$$

A parte real desses campos é dada por

$$\mathbf{A}_R(\mathbf{r}, t) = \Re[\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)] = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^*) \quad (15.58)$$

$$\mathbf{B}_R(\mathbf{r}, t) = \Re[\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] = \frac{1}{2}(\mathbf{B} + \mathbf{B}^*) . \quad (15.59)$$

O produto escalar desses campos harmônicos é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_R(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{B}_R(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4} [\mathbf{A}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \mathbf{A}^*(\mathbf{r})e^{i\omega t}] \cdot [\mathbf{B}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \mathbf{B}^*(\mathbf{r})e^{i\omega t}] \\ &= \frac{1}{4} [\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^* + \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r})e^{-2i\omega t} + C.C.] \\ &= \frac{1}{4} 2 \Re [\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^* + \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r})e^{-2i\omega t}] \\ &= \frac{1}{2} \Re [\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^* + \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r})e^{-2i\omega t}] . \end{aligned} \quad (15.60)$$

Estamos interessados na média sobre vários ciclos completos de oscilação das grandezas constituídas por esses campos harmônicos. Então calculamos

$$\langle e^{-i2\omega t} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T [\cos(2\omega t) - i \sin(2\omega t)] dt = 0 . \quad (15.61)$$

Portanto,

$$\langle \mathbf{A}_R \cdot \mathbf{B}_R \rangle = \frac{1}{2} \Re [\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^*] . \quad (15.62)$$

Assim, temos para a densidade de energia elétrica, no caso de campos harmônicos

$$\langle u_{el} \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \Re [\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{D}^*(\mathbf{r})] = \frac{1}{4} \varepsilon |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 , \quad (15.63)$$

também obtemos para a densidade de energia do campo magnético

$$\langle u_{mag} \rangle = \frac{1}{4\mu} |\mathbf{B}(\mathbf{r})|^2 , \quad (15.64)$$

tal que

$$\langle u_{EM} \rangle = \frac{1}{4} \left\{ \varepsilon |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{\mu} |\mathbf{B}(\mathbf{r})|^2 \right\} . \quad (15.65)$$

No caso de ondas planas a relação $\mathbf{B} = \hat{n} \times \mathbf{E} \sqrt{\mu\varepsilon}$ é satisfeita, e a energia do campo EM pode ser escrita como

$$\langle u_{EM} \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 = \frac{1}{2\mu} |\mathbf{B}(\mathbf{r})|^2 . \quad (15.66)$$

Obtemos resultados semelhantes para os termos envolvendo o produto vetorial entre dois vetores harmônicos. Nesse caso, a média temporal do vetor de Poynting é escrita da seguinte maneira

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \Re [\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r})] , \quad (15.67)$$

o fator $1/2$ decorre da média temporal. Usando, novamente, a relação $\mathbf{H} = \hat{n} \times \mathbf{E} \sqrt{\varepsilon/\mu}$ para ondas planas obtemos ⁴

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{S} \rangle &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \Re [\mathbf{E} \times \hat{n} \times \mathbf{E}^*] \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \Re [|\mathbf{E}|^2 \hat{n} - (\mathbf{E} \cdot \hat{n}) \mathbf{E}] \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} |\mathbf{E}|^2 \hat{n}
 \end{aligned} \tag{15.68}$$

com \hat{n} real e $\hat{n} \perp \mathbf{E}$. Utilizando o resultado (15.66) podemos finalmente escrever para a propagação de energia nas ondas planas

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \langle u_{EM} \rangle v \hat{n} = \langle u_{EM} \rangle \mathbf{v} , \tag{15.69}$$

onde v é a velocidade da onda no meio.

⁴Por simplicidade assumimos que o versor $\hat{n} = \vec{k}/k$ é **real**, assim como ε e μ .